第136回数学教育実践研究会　レポート発表

実力テストでOne more thing 4

北海道室蘭栄高等学校教諭　長尾良平

令和8年1月31日　Online 数実研

1　はじめに

第130回・132回・134回数実研で発表した[1][2][3]の続きである．本稿では, 筆者が札幌南高校に勤務していた一昨年度までの10年間で作問したもののうち, 場合の数・確率を中心に前回までで触れることのできなかった問題について, 出題意図を交えながら幾つか紹介してみたい．

2　実際の問題から

場合の数・確率は, 小問を適度に設定することによって難易度の調整がしやすい分野だと思う．また, 他分野との融合問題とすることで, 生徒の総合的な実力の判定に繋がる出題ができる．

ただ, 最初の設問で「ちょんぼ！」をしてしまい, 雪だるま式に間違えてしまう怖さも持ち合わせている．また, 問題文が長いことも多いので, 題意を正しく読み取る能力も要求される．

問1　マ, タ, タ, ビ, ア, ビ, タ, タ, マの9文字を一列に並べる作業を行う．

(1) 9文字の並べ方は全部で何通りあるか．

(2) 「タ」の字がどれも隣り合わない並べ方は何通りあるか．

(3) 「しんぶんし」のように, 右・左どちらから読んでも同じになる文を「回文」という．この9文字を並べてできる回文は何通りあるか．なお, 日本語の文章として意味が無くてもかまわない．

$\boxed{\text{意図}}$　「同じものを含む順列」「隣り合わない」「順序指定がある」といった, 場合の数で定番の出題であるが, 難問が並ぶ出題の中で一服の清涼剤として「問題文を読んだ時にクスッとして欲しい」という思惑もあった．

(2)については, まず「タ」以外の5文字の並べ方を考えると

$$ {}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 = 5 \times 6 = 30 \text{（通り）}$$

ある．次に,「タ」同士が隣り合わないように置く場所を選ぶ．

○□○□○□○□○□○ ←□が「タ」以外

6箇所の○から4箇所選んで「タ」を置けば良いので, 求める場合の数は

$$30 \times {}_6\mathrm{C}_2 = 30 \times 15 = 450 \text{（通り）}$$

(3)については,「ア」が1個しかないので, 回文にするためには「ア」が真ん中にくる．つまり, 次のような並びになれば良い．

○△□☆ア☆□△○

「ア」より左側の○△□☆の並びを考えれば良く（右側は自動的に決まる）, そこにマ：1個, タ：2個, ビ：1個を並べるから, 求める場合の数は

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 4 \times 3 = 12 \text{（通り）}$$

なお,「濁点を含む文字を並べる問題」は見かけたことがないが, 慶應義塾大学2018年度入試

（総合政策学部）の第 1 問で「『アブラカダブラ（ABRACADABRA）』という文字列が何通りできるか」という出題があり, その印象が強かったことが作問のきっかけであった.

問 2　連立不等式

$$\begin{cases} x^2+y^2-8x-4y+11<0 \cdots ① \\ x-y-1>0 \cdots ② \\ x+y-3>0 \cdots ③ \end{cases}$$

が表す領域を D とする.

また, 2 個のさいころ A, B を投げ, A の目の値を a, B の目の値を b として点 $\mathrm{P}(a,b)$ を考える. 次の問いに答えよ.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) 点 P が領域 D に含まれる確率を求めよ.

(3) $kx-y-5k+2 \leqq 0 \cdots ④$ を考え, ①,②,③,④を連立させた不等式が表す領域を D' とする. 点 P が領域 D' に含まれる確率が $\dfrac{1}{6}$ となるような実数 k の値の範囲を求めよ.

$\boxed{\text{意図}}$　「確率」「領域」の融合問題として出題した. (1) で領域を雑に図示すると, (2)(3) で確率があわない. また, (3) は「定点通過の直線」の話である.

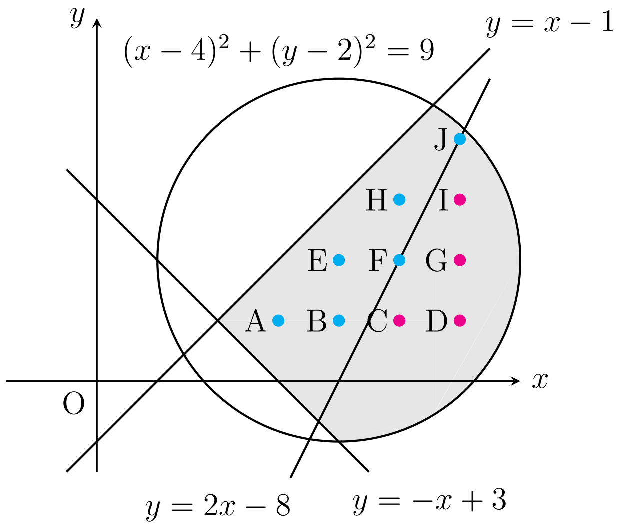

図 1: D に含まれる点（赤と青）
及び $k=2$ のときの D' に含まれる点（青）

(2) については, 次の 10 個の点が領域 D に含まれる.

$$\mathrm{A}(3,1), \mathrm{B}(4,1), \mathrm{C}(5,1), \mathrm{D}(6,1), \mathrm{E}(4,2)$$

$$\mathrm{F}(5,2), \mathrm{G}(6,2), \mathrm{H}(5,3), \mathrm{I}(6,3), \mathrm{J}(6,4)$$

目の出方は $6^2=36$（通り）あるので, 求める確率は

$$\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$$

となる.

(3) について, まず領域 D' を考えると, 領域 D において, 直線 $y=k(x-5)+2$ 及びその上側からなる領域である. 次に,

$$\frac{1}{6}=\frac{6}{36}$$

より, D' に点 P が 6 個含まれる状況を考える. 直線 $y=k(x-5)+2 \cdots ⑤$ は定点 $(5,2)$ を通るので, 次の 4 つの状況を考えればよい.

1. $k=0$　※ E, F, G, H, I, J が含まれる.
2. ⑤が直線 $y=1$ の $3 \leqq x<4$ の部分と交わる（このとき, $k>0$）　※ A, E, F, H, I, J が含まれる
3. ⑤が直線 $y=1$ の $5<x \leqq 6$ の部分と交わる（このとき, $k<0$）　※ D, F, G, H, I, J が含まれる
4. ⑤が直線 $x=6$ の $3<y \leqq 4$ の部分と交わる（このとき, $k>0$）　※ A, B, E, F, H, J が含まれる

それぞれで k の範囲を求め, その和集合を考えることによって, 求める k の値の範囲は,

$$k \leqq -1,\ k=0,\ \frac{1}{2} \leqq k<1,\ 1<k \leqq 2$$

となる.

- 領域 D' に点が 6 個入るケースを考える
- 直線 $y=k(x-5)+2$ が定点 $(5,2)$ を通る

ことに気づいていた生徒は多かったが, 場合分けして状況を記述するのに手間取り, 完答者は1名であった.

問3　3人でじゃんけんをし, 勝者が1人になるまで繰り返し行う. なお, 負けた人は次の回からは参加できない. 次の事象の確率を求めよ.

(1) 1回じゃんけんをしたとき, あいこになる.

(2) ちょうど4回じゃんけんをして, 勝者が1人に決まる.

(3) 5回以下で勝者が1人に決まる.

意図　「あいこの状況」「残り人数が減っていく状況」を正しく把握できるかどうかを確認する目的で出題した.

(1) は授業でも触れた問題であったが,

- 「3人の手が同じ or バラバラ」の片方のみ
- 「3人の手がバラバラ」なのは3通り

と考えてしまい, 本大問の得点が0点の者も少なからず存在した.

(2) は, 注意深く残り人数の推移を追う必要がある. あわせて,

- 「3人→1人」は確率 $\dfrac{1}{3}$
- 「2人→1人」は確率 $\dfrac{2}{3}$

であることを押さえておかないと, 正答に辿り着けない. 人数の推移とその確率は, 次の通りである.

1. 「3人→3人→3人→3人→1人」は確率 $\dfrac{1}{81}$
2. 「3人→3人→3人→2人→1人」は確率 $\dfrac{2}{81}$
3. 「3人→3人→2人→2人→1人」は確率 $\dfrac{2}{81}$
4. 「3人→2人→2人→2人→1人」は確率 $\dfrac{2}{81}$

よって, 求める確率は $\dfrac{7}{81}$ となる.

(3) は余事象, つまり「5回で終わらない」確率を利用したい. それは,

1. 「ずっと3人」の状況が続く
2. 「どこかで2人」になりその状況が続く

のいずれかである. よって, 求める確率は

$$1-\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4\right\}=\frac{79}{81}$$

となる.

小問集合では, 軽めの内容のものを何度か出題している. いくつか問題だけ紹介しておく.

問4　2個のさいころA, Bを投げ, 出た目をそれぞれ a, b とする. そのとき, $\sin\dfrac{b}{a}\pi$ の値が有理数となる確率を求めよ.

問5　大小2個のさいころを同時に投げ, 出る目をそれぞれ b, c とする. そのとき, 2次方程式 $x^2+bx+c=0$ が実数解をもつ確率を求めよ.

最後に, 集合の問題を一問取り上げたい.

問6　通常の立方体のさいころ（Aとする）を2個同時に投げるとき, 出る目の和 X について度数分布を調べると次のようになる.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
度数	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

次に, Aとは異なるさいころとして, 各面の数字が

$$\mathrm{B}=\{1,3,4,5,6,8\}\quad \mathrm{C}=\{1,2,2,3,3,4\}$$

であるさいころB, Cを考える.

さいころB, Cを同時に投げるとき, 出る目の和 Y について度数分布を調べると, 実は X と同じ度数分布になることが, 数え上げることによって確認できる.

これと同じことが, 正四面体のさいころについても成り立つかどうか考察せよ.

つまり, 「1から4までの数字を1つずつ正四面体の各面に割り当てたさいころD」に対し, Dとは異なるさいころE, Fの組で, 次の条件を満

たすものが存在すれば求めよ.

条件:「Dを2個同時に投げるときの出る目の和 Z についての度数分布」と「EとFとを同時に投げるときの出る目の和 W についての度数分布」が一致する.

なお, E, F の面に割り当てる数字は正の整数とする.

意図　西山豊先生(大阪経済大学名誉教授)の Web ページは他のレポートでも何回か紹介しているが, 記事 [4] を読んだ際に「理詰めで考えて1組に定まるのが面白い」と感じたので, 正四面体の場合について自分なりに解答を考え, 出題した. ちなみに, 問題の前段にある立方体 B, C のさいころを「ジッヘルマン・ダイス」という.

まず, D を2個投げるとき, 出る目の和 Z の度数分布は次のようになる.

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Z	2	3	4	5	6	7	8
度数	1	2	3	4	3	2	1

Z の最小値が2で, その度数が1だから, E , F を次のようにおく.

$$\mathrm{E} = \{1, x_1, x_2, x_3\} \quad 1 < x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$$
$$\mathrm{F} = \{1, y_1, y_2, y_3\} \quad 1 < y_1 \leqq y_2 \leqq y_3 \quad x_3 \leqq y_3$$

Z の最大値が8であるから,

$$(x_3, y_3) = (2, 6), (3, 5), (4, 4)$$

のいずれかである.

1. $(x_3, y_3) = (2, 6)$ のとき
   $\mathrm{E} = \{1, 2, 2, 2\}, \mathrm{F} = \{1, y_1, y_2, 6\}$ となり, 8の度数が2以上となるため不適.

2. $(x_3, y_3) = (3, 5)$ のとき
   $\mathrm{E} = \{1, 2, 2, 3\}, \mathrm{F} = \{1, y_1, y_2, 5\}$ となる.
   (8の度数が1だから, Eにおいて3は1個)
   このとき, (y_1, y_2) について考える.
   - 2が入ると, 3の度数が3以上
   - 4が入ると, 7の度数が3以上
   - 5が入ると, 8の度数が2以上

   となり, いずれも不適である.

   $(y_1, y_2) = (3, 3)$ のとき, $\mathrm{F} = \{1, 3, 3, 5\}$ となる. $\mathrm{E} = \{1, 2, 2, 3\}$ と同時に投げるとき, 出る目の和 W の度数分布を考えると,

	1	3	3	5
1	2	4	4	6
2	3	5	5	7
2	3	5	5	7
3	4	6	6	8

W	2	3	4	5	6	7	8
度数	1	2	3	4	3	2	1

   となり, 適している.

3. $(x_3, y_3) = (4, 4)$ のとき
   8の度数は1なので, 他に4は入らない.

   $$\mathrm{E} = \{1, x_1, x_2, 4\} \quad \mathrm{F} = \{1, y_1, y_2, 4\}$$

   $(x_2, x_3) = (2, 3)$ はDと同じになるので不適.
   よって, $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ ともに $(2, 2), (3, 3)$ のみである.

   - $\mathrm{E} = \{1, 2, 2, 4\} \quad \mathrm{F} = \{1, 2, 2, 4\}$
     ☜ 4の度数が4
   - $\mathrm{E} = \{1, 2, 2, 4\} \quad \mathrm{F} = \{1, 3, 3, 4\}$
     ☜ 4の度数が2
   - $\mathrm{E} = \{1, 3, 3, 4\} \quad \mathrm{F} = \{1, 3, 3, 4\}$
     ☜ 4の度数が4

   となり, いずれも不適である.

以上より, EとFの組としては

$$\{1, 2, 2, 3\} \quad \{1, 3, 3, 5\}$$

のみが適する.

「場合分けをしながら不適なものを除外していく」長い思考が要求される問いであり, 完答者は多くなかった. そんな中, 数学が苦手だが一生

懸命に思考し, 良い線までいっていた生徒が居たことを覚えている.

[4] では, 素朴な解法の他に「プログラミング」や「母関数」を用いた解法も紹介されており, 興味深い. また, [5][6] では「百ます計算」への拡張が紹介されている.

ここで, 母関数を用いた別解を紹介しておきたい. さいころ D には 1〜4 の面が 1 つずつあることから,

$$D(x) = x + x^2 + x^3 + x^4$$

とおく. x^k の係数は「『数字が k の面』の個数」に対応させている. $(D(x))^2$ を考えると,

$$\begin{aligned}(D(x))^2 &= (x + x^2 + x^3 + x^4)^2 \\ &= x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + 2x^3 + 2x^4 \\ &\qquad + 2x^5 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 \\ &= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 4x^5 + 3x^6 + 2x^7 + x^8\end{aligned}$$

となるが, $(D(x))^2$ の各項の係数は D を 2 回投げるときの目の和 Z の度数分布

Z	2	3	4	5	6	7	8
度数	1	2	3	4	3	2	1

に綺麗に対応している.

次に, $(D(x))^2 = E(x)F(x)$ を満たす, $D(x)$ とは異なる多項式 $E(x), F(x)$ を探してみる.

$$\begin{aligned}(D(x))^2 &= (x + x^2 + x^3 + x^4)^2 \\ &= \{x(1 + x) + x^3(1 + x)\}^2 \\ &= \{x(1 + x)(1 + x^2)\}^2 \\ &= x^2(1 + x)^2(1 + x^2)^2\end{aligned}$$

となるので,

$$E(x) = x(1 + x)^2 \quad F(x) = x(1 + x^2)^2$$

ととると,

$$\begin{aligned}E(x) &= x + 2x^2 + x^3 \\ F(x) &= x + 2x^3 + x^5\end{aligned}$$

となり, E と F の組

$$\{1, 2, 2, 3\} \quad \{1, 3, 3, 5\}$$

が得られることが分かる.

3　終わりに

このシリーズでは常に述べてきたが, 生徒にとって

- 解く価値がある
- 解いていて面白いと感じられる

ものを出題できるように心がけてきた.

現任校の室蘭栄高校では実力テストは実施していないが, 定期考査において

- 複数の解法が考えられる問題で加点
- 満点 $+\alpha$ のボーナス問題

といったものを入れることによって, 生徒を刺激することは継続して行っている.

問題 6 では「母関数」を利用した別解も紹介したが, その威力に筆者自身が感動した. 生徒には別解を紹介しなかったのだが,「答案返却時に生徒に紹介しておけば・・・」と少し後悔している.

また, 元会員の加藤先生のレポート [7] にも「母関数を利用した数え上げ」の話があり, 加藤先生の在りし日の姿を思い出していた.

余談だが,「回文」は生徒の興味を惹いたようで,「回文を効率良く作る方法」を「総合的な探究の時間」のテーマとして選んだ班が現れた. [8][9] は馬鹿馬鹿しいが, 知的好奇心をくすぐってくる本である.

今後も, 授業を通して（数学との関係「有り」・「無し」を問わず）生徒の知的好奇心を揺さぶっていきたいと思う.

参考文献等

[1] 長尾良平「実力テストで One more thing」第 130 回数学教育実践研究会レポート

[2] 長尾良平「実力テストで One more thing 2」第 132 回数学教育実践研究会レポート

[3] 長尾良平「実力テストで One more thing 3」第 134 回数学教育実践研究会レポート

[4] 西山豊「サイコロの目の和が同じ」`https://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/math2010j/sicherman_j.pdf`

[5] 西山豊　「エレガントな解答をもとむ」
数学セミナー 2018 年 9 月号　日本評論社

[6] 宮永望・西山豊「ジッヘルマン・ダイスの百ます計算への拡張」大阪経大論集・第 66 巻第 4 号

[7] 加藤秀隆「サイコロの目の和覚え書き」
第 55 回数学教育実践研究会レポート

[8] 大学入試シリーズ「回文大学校 2018」
回文社

[9] 大学入試シリーズ「回文学院大学 2019」
回文社