

第137回数学教育実践研究会 レポート発表

複素数と方程式で One more thing

北海道室蘭栄高等学校教諭 長尾良平

令和8年6月13日 北海道大学

1 はじめに

数学Ⅱの「複素数と方程式」の章は、「虚数単位 i 」や「解と係数の関係」、「剰余の定理」などが登場し、(教える側としては)高校数学花盛り! という印象を受ける。ただ、扱う内容が濃くなり、題材も増えるので、見通しよく教えることが必要になると思っている。

そこで、拙文では扱う順序や内容を少し工夫した実践を紹介したい。

2 剰余の定理を前倒しで

筆者は、「高次方程式が解けること」を前半の目標に設定し、「解と係数の関係」を後回しにした。

- (1) i の導入
- (2) (2次方程式の)解の公式・判別式
- (3) 剰余の定理・因数定理
- (4) 高次方程式
- (5) 解と係数の関係

—— 剰余の定理 ——

多項式 $P(x)$ を $x-k$ で割った余りは $P(k)$ に等しい。

については、余りが $P(k)$ ということが強調され

るが、 $P(x)$ を $x-k$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りを R とするとき

$$P(x) = (x-k)Q(x) + R$$

という関係が本質である。剰余の定理を使って余りを求める際も、この関係をイメージすることを強調して指導してきた。

この時点で、割り算の恒等式を強調することで、頻出の「2次式で割ったときの余り」の問題にもスムーズに繋がると考えている。

例1 $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ を次の式で割った余りを求めよ。

(1) $x-1$

$$P(x) = (x-1)Q(x) + R \text{ をイメージ}$$

☞ R を取り出すには $x=1$ を代入

$$\text{余りは } P(1) = 2 + 3 - 4 - 1 = 0$$

(2) $x+1$

$$P(x) = (x+1)Q(x) + R \text{ をイメージ}$$

☞ R を取り出すには $x=-1$ を代入

$$\text{余りは } P(-1) = -2 + 3 + 4 - 1 = 4$$

(3) $2x+1$

$$P(x) = (2x+1)Q(x) + R \text{ をイメージ}$$

☞ R を取り出すには $x = -\frac{1}{2}$ を代入

$$\text{余りは } P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2 - 1 = \frac{3}{2}$$

剰余の定理において、割り切れる場合が因数定理である。割ることのできる1次式を見つけて

割り算を実行するが、筆者は筆算でも組立除法でもなく、目の子でやることを推奨している（面倒くさいので）。

例2 $P(x) = x^3 + 4x^2 - 9$ を因数分解せよ。

まず、 $P(-3) = -27 + 36 - 9 = 0$ となるので、 $P(x)$ は $x + 3$ で割り切れる。

$$P(x) = x^3 + 4x^2 - 9 = (x + 3)(\square + \square + \square)$$

とできるが、商の2次式（今は $x^2 + x - 3$ ）は

(1) 2次の項は $x^3 = x \cdot x^2$ で即決

(2) 定数項は $-9 = 3 \cdot (-3)$ で即決

(3) 1次の項は $4x^2 = 3x^2 + \square x$ で x

とあっさり求まる。4次式以上でも同様である。

また、数学Iの因数分解の学習が終わった時点で、方程式の解と関連づけて因数定理を扱うのは可能であり、むしろ自然だと考えている。多項式の除法を取り扱わなくても、目の子でやれば因数分解は可能であり、手頃な背伸び学習だと思う。

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

の因数分解も、この流れで導入する方がスムーズであり、

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

などを紹介するのも良いと思う。

例3 $P(x) = x^3 + 8x^2 + 11x - 6$ を因数分解せよ。

因数定理の利用を考えて、定数項の約数を順次代入していくが、

$$P(\pm 1), P(\pm 2), P(\pm 3), P(6)$$

は全てハズレで、 $P(-6)$ が当たりである。

$$P(x) = (x + 6)(x^2 + 2x - 1)$$

と因数分解される。こういう、ちょっと意地悪な問題も取り混ぜながら、生徒には練習させたい。

また、因数定理の応用として、次の話をするのも良いかと思う。

交代式の性質

$P(x, y)$ を x, y についての交代式とすると、

$$P(x, y) = (x - y)Q(x)$$

を満たすような対称式 $Q(x)$ が存在する。

$P(x, y)$ は x, y についての交代式なので、

$$P(y, x) = -P(x, y)$$

を満たす。両辺で x に y を代入すると、

$$P(y, y) = -P(y, y) \quad \text{から} \quad P(y, y) = 0$$

が成り立つので、 $P(x, y)$ は $x - y$ で割り切れる。そこで、

$$P(x, y) = (x - y)Q(x, y)$$

とおく。そのとき、

$$\begin{aligned} P(y, x) &= (y - x)Q(y, x) \\ &= -(x - y)Q(y, x) \end{aligned}$$

であり、 $P(y, x) = -P(x, y)$ より

$$Q(x, y) = Q(y, x)$$

が成り立ち、 $Q(x)$ は対称式となる。

剰余の定理・因数定理とセットで登場するのが、組立除法（ホーナー法）である。

例4 $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3x + 6$ を $x - 2$ で割ったときの商と余りを求めよ。

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -6 & 3 & 6 & 2 \\ & 4 & -4 & -2 & \\ \hline & 2 & -2 & -1 & 4 \end{array}$$

より、商が $2x^2 - 2x - 1$ 、余り4となる。

筆者は目の子で割り算をしてしまうこともあるが、「組立除法で商まで求められる理由」が腹落ちしていなかったため、普段はあまり使用していなかった。

今年度、生徒から「組立除法の仕組みについて説明して欲しい」とのリクエストがあった。それを受けて予習していると、Webで[1]を見つけた。分かりやすい説明で腹落ちしたので、紹介しておきたい。

先ほどの

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -6 & 3 & 6 & 2 \\ & 4 & -4 & -2 & \\ \hline 2 & -2 & -1 & & 4 \end{array}$$

であるが、 x^n を補って表示すると

$$\begin{array}{r|rrrr} P(x) \rightsquigarrow & 2x^3 & -6x^2 & 3x & 6 & 2 \\ 2Q(x) \rightsquigarrow & & 4x^2 & -4x & -2 & \\ \hline xQ(x) \rightsquigarrow & x(2x^2 & -2x & -1) & & 4 \end{array}$$

となっており、

$$P(x) + 2Q(x) = xQ(x) + 4$$

すなわち

$$P(x) = (x - 2)Q(x) + 4$$

が成り立っている。

また、ホーナー法は「高速代入」術である。

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 - 6x^2 + 3x + 6 \\ &= x(2x^2 - 6x + 3) + 6 \\ &= x(x(2x - 6) + 3) + 6 \end{aligned}$$

と変形した上で代入をする。

$$\begin{aligned} P(2) &= 2 \cdot (2 \cdot (2 \cdot 2 - 6) + 3) + 6 \\ &= 2 \cdot (2 \cdot (-2) + 3) + 6 \\ &= 2 \cdot (-1) + 6 \\ &= 4 \end{aligned}$$

は、

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -6 & 3 & 6 & 2 \\ & 4 & -4 & -2 & \\ \hline 2 & -2 & -1 & & 4 \end{array}$$

ときれいに対応している。演算回数をカウントすると

- 普通に代入：乗算6回、加算3回
- ホーナー法：乗算3回、加算3回

となり、手間がかかる乗算の回数が減っていることから、「高速代入」術であることが確認できる。

3 解と係数の関係に戻る

因数定理を利用して高次方程式を解く演習まで終わった時点で、「解と係数の関係」に戻った。

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解を α, β とする。教科書では「2次方程式の解と係数の関係」を

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

で導出しているが、因数定理を学んだ後では

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

とおき、係数比較して導出することができる。

教科書には発展として「3次方程式の解と係数の関係」も載っているが、そちらは係数比較で導出しているので、2次方程式についても係数比較の方が統一性があって良いと思う。

授業では、「同じ調子で4次方程式以上でも、解と係数の関係は考えられるよね!？」と投げかけておき、定期考査のボーナス問題として出題した。

例5 4次方程式 $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ の解を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とするとき、解と係数の関係を答えよ（結論のみで良い）。

4本の関係式のうち、ミスが一番多かったのは2次の係数に関するものであり、

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta + \delta\alpha = \frac{c}{a}$$

であった（気持ちはよく分かる）。因数分解

$$(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)$$

をイメージすると、 x^2 の項ができるのは、 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ から2つを選んで掛け合わせたときなので、 ${}_4C_2 = 6$ 通りある。したがって、項も6つある筈である。

「解と係数の関係」を応用する問題は多岐にわたるが、求値問題もその1つである。

例6 3次方程式 $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$ の3つの解を α, β, γ とするとき、次の値を求めよ。

- (1) $\alpha + \beta + \gamma, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha, \alpha\beta\gamma$
- (2) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
- (3) $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
- (4) $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma)$

- (3) については、次数下げ
- (4) については、因数分解

を利用した解法が可能である。初見では生徒は気づきにくいですが、

- 「式の見方・捉え方」を広げる
- 「方程式の解」の意味を再確認

点で、非常に良い題材だと思っている。因みに、筆者は上手い解法を紹介する際に「名画鑑賞」というワードを用いている。

その一方で、基本対称式等で表して計算した答案も大事にしたい。使える道具（基本対称式）を睨みながら、微調整していく能力も大切だからである。

4 終わりに

この单元では、生徒に対して

- 新しい視点
- 逆転の発想

を提示することが、ねらいの1つであるように思われる。

- 「2乗して-1」になる数 i を導入
☞ 存在しなければ作ってしまう。
- 「代入計算」で1次式で割った余りを出す
☞ 余りを求めるのに何を代入する。

- 「方程式を解く」ことによって因数分解
☞ 因数分解をして方程式を解いてきた。

このことを踏まえた上で、指導を進めていくことが大事だと考える。それは、「新しい視点」「逆転の発想」が得意な生徒、苦手な生徒のどちらにとっても、良い刺激を与えると思うからである。

また、单元内で扱う順序を変更する例は、今までのレポート [2][3] でも幾つか紹介してきた。

今回は、「剰余の定理」を「解と係数の関係」より優先する例を紹介したが、肌感覚と生徒の振り返りから

因数定理を利用して高次方程式を解くのは、目的がはっきりしていて生徒も取り組みやすい

ので、作戦としては悪くないという印象をもった。

今後も、題材の扱い方・扱う順序の工夫を続けていきたい。

参考文献等

- [1] 数学の時間「組立除法は好きですか？」
https://akiyamath.com/2024/08/synthetic-division_and_horners-method/
- [2] 長尾良平「図形と計量で One more thing」
第120回数学教育実践研究会レポート
- [3] 長尾良平「数列の導入で One more thing」
第123回数学教育実践研究会レポート
- [4] 大上丈彦「4次元の林檎」荒地出版社
- [5] 中村文則「剰余の定理のちょっとした小手技」
第41回数学教育実践研究会レポート
- [6] 中村文則「三次式で割った余りの小手技」
第78回数学教育実践研究会レポート
- [7] 中村文則「組立除法の小手技」
- [8] 中村文則「剰余の定理の小手技(令和 ver)」
第135回数学教育実践研究会レポート