

第138回数学教育実践研究会 レポート発表

指数関数・対数関数で One more thing

北海道室蘭栄高等学校教諭 長尾良平

令和8年8月1日 Oneline 数実研

1 はじめに

数学Ⅱの「指数関数・対数関数」については、 $a^{\log_a M} = M$ を納得できることが、急所の1つだと思っている。このことは、 $\log_a M$ の定義から自明だが、思いのほか生徒にとってはハードルが高いようである。

そこで、拙文では扱う順序や内容を少し工夫した実践を紹介したい。

2 指数法則を中心に据えた展開

指数・対数の「概念や基本法則の理解・習熟」を大事にして、次のような順序で指導を行った。

- (1) 整数・有理数の指数の導入
- (2) 指数関数のグラフの紹介
- (3) 対数の導入
- (4) 対数関数のグラフの紹介
- (5) 大小比較・方程式と不等式
- (6) 常用対数

指数の拡張については、オーソドックスな流れで授業を展開している。[1]にある「**法則は数より偉いのか?**」が、ここでのキーワードである。

有理数の指数まで馴染んだあたりで、指数関数 $y = a^x$ のグラフを紹介する。このタイミングでグラフを紹介するのは、対数を導入するための準備であり、大小関係などはまだ扱わない。

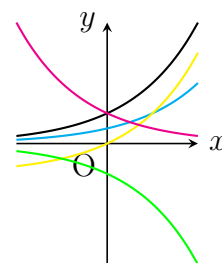
その際、数学Ⅰで「 $y = f(x)$ のグラフ」に対して、

- $y = f(-x)$ のグラフ
- $y = -f(x)$ のグラフ

等を扱っているので、次のような問いも復習として触れると良いと思う。

例1 —が $y = 2^x$ のグラフのとき、残りのグラフはどの式になるか考えよ。

- (1) $y = 2^{x-1}$
- (2) $y = 2^x - 1$
- (3) $y = 2^{-x}$
- (4) $y = -2^x$

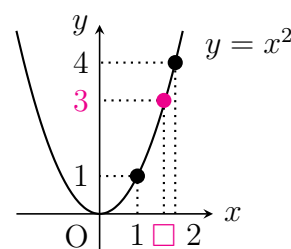


指数関数のグラフに慣れたところで、対数を導入する。 $\sqrt{a}$ の定義の復習から話を始めた。

例2 中学校の復習

$\square^2 = 3$ となる $\square$ が 1と2の間に1つ存在。

これを $\sqrt{3}$ と表す。
つまり、 $(\sqrt{3})^2 = 3$

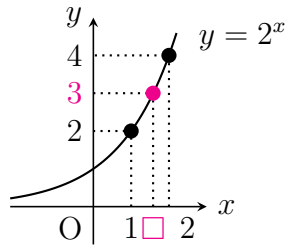


ここでは、 $(\sqrt{3})^2 = \sqrt{9} = 3$ ではなく、 $\sqrt{3}$ の定義から $(\sqrt{3})^2 = 3$ ということを強調したい。

例3 対数の導入

$2^{\square} = 3$ となる $\square$ が
1 と 2 の間に 1 つ存在.

これを $\log_2 3$ と表す.
つまり, $2^{\log_2 3} = 3$



$\log_a M$ は $a^{\log_a M} = M$ を満たす数

この後は, この関係式を大事にしながら対数の概念に慣れていくように演習を行った.

例4 $\square$ に入る数を求めよ.

(1) $\log_4 \square = 3$ 答え $\square = 64$

☞ イメージは, $4^{\overbrace{\log_4 \square}^{\text{ここが 3}}} = \square$

(2) $\log_{\square} 64 = 2$ 答え $\square = 8$

☞ イメージは, $\square^{\overbrace{\log_{\square} 64}^{\text{ここが 2}}} = 64$

(3) $\log_2 8 = \square$ 答え $\square = 3$

☞ イメージは, $2^{\overbrace{\log_2 8}^{\text{ここは?}}} = 8$

類題で練習した後, [2] の投稿を参考に「時間制限を課した問題演習 (タイムトライアル)」を実施した.

また,

- This is my pen.
- My pen is this.
- This pen is mine.

の 3 つの文章は「(ニュアンスが異なる) 同じ状況」について説明しているが,

$$2^3 = 8, \sqrt[3]{8} = 2, \log_2 8 = 3$$

についても同じだよねという話もしている.

この後は, いよいよ各種公式の導出である. ここでも, [1] に倣って $a^{\log_a M} = M$ をベースにしている.

例5 次の公式の証明を行う.

(1) $\log_a M + \log_a N = \log_a MN$

(2) $\log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

(3) $k \cdot \log_a M = \log_a M^k$

(4) $\log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$

$a^{\log_a M} = M \dots \textcircled{1}$ $a^{\log_a N} = N \dots \textcircled{2}$ を考え,

(1) $\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ $a^{\log_a M} \times a^{\log_a N} = MN$
 $a^{\log_a M + \log_a N} = a^{\log_a MN}$
 $\therefore \log_a M + \log_a N = \log_a MN$

(2) $\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ $a^{\log_a M} \div a^{\log_a N} = \frac{M}{N}$
 $a^{\log_a M - \log_a N} = a^{\log_a \frac{M}{N}}$
 $\therefore \log_a M - \log_a N = \log_a \frac{M}{N}$

(3) $\textcircled{1}$ の両辺を k 乗 $(a^{\log_a M})^k = M^k$
 $a^{k \cdot \log_a M} = a^{\log_a M^k}$
 $\therefore k \cdot \log_a M = \log_a M^k$

(4) $c^{\log_c a} = a$ の両辺を $\log_a b$ 乗

$$(c^{\log_c a})^{\log_a b} = a^{\log_a b}$$

$$c^{\log_c a \cdot \log_a b} = b = c^{\log_c b}$$

$$\therefore \log_c a \cdot \log_a b = \log_c b$$

この流れで証明することによって, 「指数法則」と「対数の計算公式」との関係がより明確になるだろう. 他にも,

$$c^{\log_a b} = b^{\log_a c} \quad \log_a b = \log_{a^n} b^n$$

といった関係式を, 余力のある生徒に証明させるのも良いと思う.

$y = \log_a x$ のグラフについては, [4] でも紹介した方法で説明した。

例6 $y = \log_a x$ のグラフはどんなかたち？

- $y = a^x$ のグラフを提示
- $y = \log_a x$ は $x = a^y$ と書き換えられる
- $y = a^x$ と $x = a^y$ は x, y を入れ替えたもの
- グラフで x, y を入れ替えるには・・・
- 直線 $y = x$ に関して対称移動する！

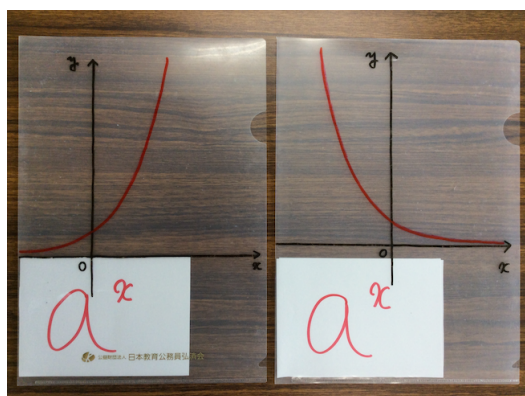


図 1: $y = a^x$ のグラフ

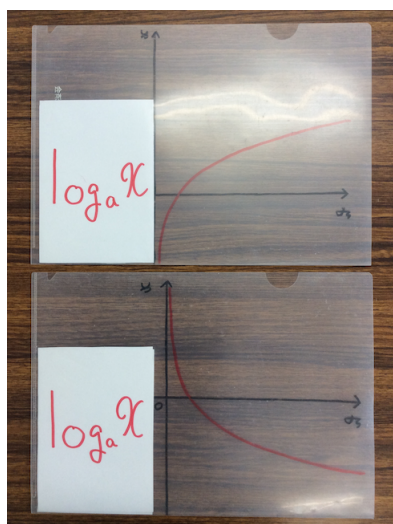


図 2: $y = \log_a x$ のグラフ

この単元終了時の振り返りシートを見ると, この単元で一番印象に残ったこととして, 「**クリアファイルを利用したグラフの説明**」と書いてくれた生徒もいた。

また, $a > 1$ のとき,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$$

だが, **増加スピードはかなり異なる**ことは触れておきたい。

$$2^{100} = 1267650600228229401496703205376$$

と

$$\log_2 100 < 7$$

である。このことも, 2つのグラフの対応を考えれば納得できることである。

グラフの話が終われば, 方程式・不等式, 大小比較に繋げられる。指数と対数の間で行き来する問題もあるので, **対数のグラフまで終えた後で扱うのが良い**と考えている。

なお, 不等式・大小比較の問題を扱う際には, $y = a^x, y = \log_a x$ の**グラフ (の概形) を必ず板書するようにし, 不等式の根拠を明らかにする**ように努めた。

本単元のハイライトは, 筆者が大好きな「常用対数」であるが, こちらについての実践は [4] を見ていただきたい。

3 終わりに

生徒にとっては, 馴染みのある指数に対して, 難しそうに見える対数。その間の関係性を明確にしように行った実践であった。

「**記号フェチ**」である筆者からすれば, $\log$ は「カッコイイ」対象なのであるが, なかなか生徒からの同意は得られない (「なんか $\log$ を使うだけで, 2段くらいカッコよくみえますよね」というコメントもありましたが・・・)。

- 定義に基づいて導かれる関係式
☞ 一度分かってしまえばいいのですが・・・
- 底と1との大小・真数条件
☞ チェックポイントがたくさん・・・

ということで, 生徒が苦手そうな事項が詰まっていることは確かである。

[1]にある「**覚えることを減らして, 覚えたことを増やそう**」というフレーズを唱えながら, 三角関数の指導に続いていくのでした・・・。

参考文献等

- [1] 大上丈彦「4次元の林檎」荒地出版社
- [2] ぬまち #疑わしきはバツせず さんの X
<https://x.com/numachi11111/status/2032494960780644684>
- [3] 長尾良平「関数のグラフで One more thing 2」
第 108 回数学教育実践研究会レポート
- [4] 長尾良平「常用対数で One more thing」
第 109 回数学教育実践研究会レポート
- [5] 中村文則「 a^p 計算のちょっとした小手技」
第 49 回数学教育実践研究会レポート
- [6] 中村文則「指数と対数の関係のちょっとした小手技」
第 42 回数学教育実践研究会レポート

「対数の概念に慣れる」

組 番

問 次の□に当てはまる数を答えよ.

(1) $\log_2 8 = \square$

(2) $\log_3 \square = 2$

(3) $\log \square 9 = 1$

(4) $\log_4 \square = 3$

(5) $\log_5 25 = \square$

(6) $\log \square 16 = 2$

(7) $\log \square 81 = 4$

(8) $\log_2 \square = 9$

(9) $\log_2 128 = \square$

(10) $\log_7 \square = 3$

(11) $\log \square 100 = 2$

(12) $\log_5 \square = 3$

(13) $\log \square 64 = 3$

(14) $\log_3 \square = 3$

(15) $\log \square 32 = 5$

(16) $\log_6 \square = 2$

(17) $\log_5 625 = \square$

(18) $\log_{10} \square = 4$

(19) $\log_4 256 = \square$

(20) $\log \square 243 = 5$

$$(21) \quad \log_{10} 0.001 = \square$$

$$(22) \quad \log_2 0.25 = \square$$

$$(23) \quad \log_3 \square = -1$$

$$(24) \quad \log \square \frac{1}{4} = -2$$

$$(25) \quad \log_{\sqrt{2}} 2 = \square$$

$$(26) \quad \log_{\frac{1}{2}} 2 = \square$$

$$(27) \quad \log_4 \square = \frac{1}{2}$$

$$(28) \quad \log \square 6 = 2$$

$$(29) \quad \log \square 9 = 4$$

$$(30) \quad \log_8 2 = \square$$

$$(31) \quad \log_{\frac{1}{4}} \square = -3$$

$$(32) \quad \log \square 4 = -2$$

$$(33) \quad \log_{65537} 1 = \square$$

$$(34) \quad \log \square \frac{1}{4} = -2$$

$$(35) \quad \log_{16} \square = \frac{1}{4}$$

$$(36) \quad \log_9 27 = \square$$

$$(37) \quad \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} = \square$$

$$(38) \quad \log_8 \square = \frac{1}{3}$$

$$(39) \quad \log_8 4 = \square$$

$$(40) \quad \log_{\sqrt{2}} \square = 9$$