

「ゆかいな生徒と私」～啓成61期生「理数科」の徒然日記～

北海道札幌啓成高等学校

若 林 理一郎

1. はじめに

1年前に現任校で初めて卒業生を出して、理系の受験生を相手に再度受験指導しながらものんびりとした生活に慣れてきたある日、降って湧いたように1年生担任の内示を受けた。更に数日後、ホームルーム担任のクラスが「8組」、つまり、本校の「理数科」を持つことになってしまった。赴任して4年間は深く関わることもなく過ごしてきたので、私にとっては普通科とはちょっと雰囲気の違いというイメージでしかなかった。

そして、4月から実際に関わるようになったのだが、同じ高校にしながら別な学校の生徒を相手しているようなところもある不思議な集団で、とにかく面白いのである。特に数学の授業の様子がかなり違い、「数学マニア」ともいうべき生徒達を中心に展開するのだが、豊かな発想で課題に取り組む姿勢がクラス全体に見られるので、どんな集団かということも含めてこれは書き留めておくべきだろうと思い、綴っていく次第である。

2. 「お迎えテスト」の結果

3月の入試が終わった頃、新入生に配布する資料を確認して欲しいということで見てみると、理数科だけ「お迎えテスト」をするという記載であった。昨年度がそうであったならばということで深く考えることもなく、前年踏襲した。

4月に入ってそろそろテストの準備をしなければならぬと思い、前回の試験のデータを見てみるとなかなかの内容。平均点も期待したほどではなかったとのことなので、実情把握と春休み中にどの程度予習してくるか（数学Ⅰの因数分解までが試験範囲）を見極めることを目的として試験を行うことにした。

試験を行った結果であるが、気になった得点率を一部抜粋する。（全体平均 80.45 点／34 題、標準偏差 12.31）

8(1) : $(x+3)^2(x-3)^2$ の展開 → 72.5%

8(2) : $(x^2+4)(x+2)(x-2)$ の展開 → 100%

9(1) : $(x^2+4x+1)(x^2+4x+3)$ の展開 → 77.5%

9(2) : $(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$ の展開 → 90.0%

15 : たすき掛けによる因数分解 → 83.75% (2 題平均)

17 : $(x+y)^2-3(x+y)-18$ の因数分解 → 92.5%

18 : $2x^2-3xy-2y^2+5x+5y-3$ の因数分解 → 27.5%

正直なところ（今まで受け持った生徒と比べると）、18の問題で4分の1強が正答しているのには驚いた。

3. 第1回「スタサポ」と「入試点」

本校では例年、新入生全員を対象に「スタサポ」を実施している。数学だけに絞って普通科の結果と比較すると、今年度は2～3段階上であることがわかった。そういえば「入試点」とも比べると、理数科目に絞った平均点は2桁以上上回っていた。

4. 「展開」と「基本対称式を利用した式変形」の授業で

何となく3乗の「展開・因数分解」は此处で授業するメリットを感じていないので、いつも飛ばしている。ただ、何となく「 $(a+b)^3$ を展開するとどうなるか知ってる？」と聞いてみると、K君がその結果を誦んじて見せた。それならばと更に「 $(a+b)^4$ は？」と聞くと先程同様に躊躇なく答えていた。5乗も同様だった。どうして答えられるのかと尋ねてみたところ、YouTubeを見て勉強したとのこと。今時の生徒だなと思いつつ、インターネット恐るべしとも感じた。

3乗の公式を飛ばしたにも関わらず、その後の式の値の授業では x^3+y^3 の値も取り上げるという自己矛盾のようなこともしている。そして、 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ や $(x-y)^2$ を取り上げた後で、「 x^7+y^7 はどうやって変形したらよいと思う？」と質問してみた。偶数乗ならば $(\bigcirc+\triangle)^2$ の利用で簡単にできると思い、わざと奇数乗にしてみた。すると、これが意外に盛り上がった。誰か前で説明してみても生徒に振ったところ、2人の生徒が黒板で説明してくれた。

< S₁ 君の説明主旨 >

$x^7+y^7=(x^6+y^6)(x+y)-x^6y-xy^6=(x^6+y^6)(x+y)-xy(x^5+y^5)$ で、ここから更に x^6+y^6 , x^5+y^5 を「基本対称式」を用いて変形すればよいと思う。

< F 君の説明主旨 >

$(x+y)^7=x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7$ となって、ここに「 x^7+y^7 」が出てくる。だから、他の項を「基本対称式」を用いて変形すればよいと思う。(残り時間が少なかったので説明はここまで)

この後、私の解答を紹介して終わったのだが、ポンポンと5乗や7乗の展開が出てくるとは思わなかった。

5. 「1次不等式の応用問題」の解答で

【練習 49】案内状を作ることになったので制作費を調べた。A 店では、100 部までは5000 円、100 部を超える分は1 部につき 40 円である。また、B 店では、100 部までは 4500 円、100 部を超える分は1 部につき 43 円である。B 店で作るより A 店で作る方が安くなるのは、何部以上作るときか。 <「高等学校 数学 I」(数研出版)>

何を x と置くかで立式や答えが変わってくる問題(生徒が迷いという意味で)である。(少なくとも普通科の)多くは例題同様に代数的に立式して答えを導いていた。

< 解答例 >

案内状を x 部作るとして、それぞれの店での製作費をもとに立式すると、

$$5000+40(x-100)<4500+43(x-100)$$

これを解いて、 $x>\frac{100}{3}\doteq 266.\dot{6}$

これを満たす最小の自然数 x を求めると 267.

(答え) 267 部以上

我がクラスでは F 君(だった気がする)が説明してくれたのだが、グラフを用いての解法だった。

<説明主旨>

100 部まではグラフより B 店の方が安くなるのは明らか. $x > 100$ で考えれば良い.

A 店の費用を表す関数 $\Leftrightarrow$ 点(100, 5000)を通る傾き 40 の直線 $\Leftrightarrow y = 40x + 1000$

B 店の費用を表す関数 $\Leftrightarrow$ 点(100, 4500)を通る傾き 43 の直線 $\Leftrightarrow y = 43x + 200$

の共有点を求め, そのときの x 座標より大きい値を x が取るときに A 店で作る方が安くなる範囲に一致することが, グラフから明らかである. よって, 不等式 $40x + 1000 < 43x + 200$ を解いていく. (以下略)

発表が終わった後, 驚きの声と拍手が起こったと記憶している.

そして, 授業が終わった後, 今度は O 君がやってきて, 「もっと簡単な式で表したいと思って考えたんですけど」といってノートを持ってきた. F 君の考えを更に深めて, グラフの平行移動を用いた考えによる立式である.

<説明主旨>

A 店, B 店の費用を表す 2 直線を求めるところまでは同じ.

$x = 100$ のとき, 2 つのグラフの y 座標の差は $(40 \times 100 + 1000) - (43 \times 100 + 200) = 500$.

ここで, 共有点の x 座標 x_1 とすると, グラフを平行移動して $y = 40x$ と $y = 43x$ について考えたときに,

y 座標の差 $43x_1 - 40x_1 = 3x_1$ について, $3x_1 \geq 500$ が成り立つ x_1 を求めれば良い.

確かに立式自体は簡単になったけど, その説明を記述して説明するとどうだろうね? 尋ねて見ると苦笑していた. しかし, (関数導入前の時期に) グラフを平行移動させて考えるという発想には驚いた.

6. 「絶対値の不等式」を解く

$|x - 2| \leq 3x$ のようなタイプの不等式を解いてから, 章末問題にあった次の問題に取り組ませてみた.

方程式 $|x| + |x - 2| = 4$ を解け. <「高等学校 数学 I」(数研出版)>

これは, 普通科でも取り組ませてみた. 「10分あげるから隣や周りと相談してみて.」と振ってみたが当然, 絶対値が1つのときに場合分けを使って解く手法は学んでいるのだが, 2つとなると絶対値の外れ方の境目(と私はいつている)が2つあるので多くの生徒は混乱しているようであった. その中で普通科の K 君と理数科の S₂ 君が同じ考え方で説明してくれた.

<説明主旨>

1) $x \geq 0$ で $x \geq 2$ のとき, $x + x - 2 = 4$ だから $x = 3$ で条件を満たす.

2) $x < 0$ で $x \geq 2$ のとき, $-x + x - 2 = 4$ だから $-2 = 4$ で???

3) $x \geq 0$ で $x < 2$ のとき, $x - (x - 2) = 4$ だから $2 = 4$ で???

4) $x < 0$ で $x < 2$ のとき, $-x - (x - 2) = 4$ だから $x = -1$ で条件を満たす.

よって, 求める方程式の解は, $x = 3, -1$

理数科の S₂ 君は, 2), 3)の処理は等式が成り立たないので不適としたが, 普通科の K 君はどうしたらよいか困って

いた。すると、別な生徒が S_2 君と同様の結論を出してくれたので、一応は決着した。

しかし、ここは本来、2)は成り立たない。とりあえずそれぞれ場合分けしたところまでは良かったが、その共通部分を条件としてそれぞれの答えを導くというところまでは結びつかなかった。最後にその点をフォローして終わったのだが、ここまで導けたなという感想を抱いた。

7. 2次関数の「一般形」と「標準形」～*Functionview*を利用して～

2次関数の導入で*Functionview*を利用することにした。生徒の感想も含めた詳細は後日、別なレポートで発表しようと思うが、ちょうど1年生の進度がこのあたりの学校もあると思うので、流れを紹介しておく。

1時間目) *Functionview* の導入として「 n 次関数のグラフ」の形を予測することにした。

○1次関数を $y=x-\alpha$, 2次関数を $y=(x-\alpha)(x-\beta)$ (ただし, $\alpha \neq \beta$) として、5次関数や6次関数まで描かせて、10次関数や n 次関数の概形を予測させた。ただ、この形式では必ず $n-1$ 回だけ極値を持つ(曲がる)ので、あくまで最大 $n-1$ 回で曲がらない場合もあるということを、 $y=x^3$ や $y=x^4$ で紹介した。

2時間目) *Functionview* を使って、 $y=ax^2+bx+c$ の a, b, c を変化させるとグラフはどのように変化するかを調べさせた。その後、課題として a, b, c を変化させることで自由に(一発で指定したところに)グラフを移動させられるだろうかということを考えさせ、横方向へは自由に動かすことができないので難しいという結論に達した。

3時間目) *Functionview* を使って、 $y=ax^2$ をスタートに

$$\textcircled{1} y-2=a(x-1)^2 \quad \textcircled{2} y+1=a(x-2)^2 \quad \textcircled{3} y+3=a(x+3)^2$$

の4つのグラフを描かせ、グラフと式の関係性を考えさせた。特に、一般の平行移動に結びつけていくことを意識した形にして、各象限に頂点が存在することで符号も含めた関係性を見つけやすいようにした。

一応、この3時間で2次関数の「一般形」「標準形」、一般の関数の「平行移動」までを終えた。

結構、生徒の反応は良かった気がするが、総括は後日にまとめて...

8. 「ペアワーク」をするにも・・・のぼやき

古い授業スタイルの私も4月からペアワークを取り入れ始めた。ただ、引っ込み思案で一意専心(???)の本校生徒たちは、問題を解かせるとひたすら黙って解く。「相談しながらやってもいいんだぞ。」といってもまだ、黙って解く。一度、廊下へ姿を消しに行くと、コソコソ相談し始める。「わからない人がいれば教えてあげたり、答え合わせを試みたり、解き方や書き方を見比べ合うと発見があるかもしれないぞ。」と滔々と語って漸く盛り上がり始める。このような展開がほぼ毎回である。

いつになったら、自主的にやってくれるやら・・・。(続く)