場合の数と確率【集合の要素の個数】 p.14～18

青チャートA: 例題 1～5

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】集合で学んだことを活用して「要素の個数」を考えよう

「ベン図」や「カルノー図」を使いこなそう

○集合の要素の個数

有限個の要素からなる集合を **有限集合** といい，無限に多くの要素からなる集合を **無限集合** という。集合 A が有限集合のとき，**その要素の個数を $n(A)$ で表す。**

カッコの中が指す集合の中に含まれる要素の個数を書けば良い。$n(\ )$ を忘れないこと。

例えば，1 桁の自然数全体の集合

$$P=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

については，$n(P)=9$ である。

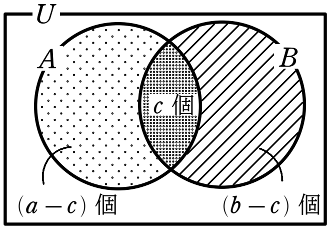
また，空集合 $\varnothing$ は要素を 1 つももたないから，$n(\varnothing)=0$ である。

全体集合 U の部分集合 A，B に対して，$n(A\cup B)$ を考えよう。

$n(A)=a$，$n(B)=b$，$n(A\cap B)=c$

とすると，右の図からわかるように

$$n(A\cup B)=(a-c)+(b-c)+c$$
$$=a+b-c$$



である。すなわち，次の等式が成り立つ。

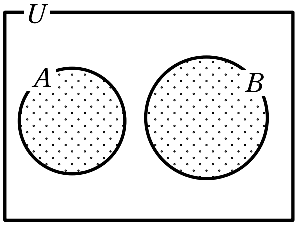
$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

重なっている分を引く

特に，$A\cap B=\varnothing$ のときは $n(A\cap B)=0$ であるから

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$$

A と B が重ならないなら共通部分は 0 個
引く分の個数がないので個数の和は足すだけ



以上の結果をまとめると，次のようになる。

> 和集合の要素の個数
> 1　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
> 2　$A\cap B=\varnothing$ のとき　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

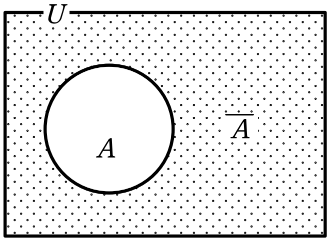
○補集合の要素の個数

全体集合を U とし，U の部分集合 A の補集合 $\overline{A}$ を考えると

$$A\cup\overline{A}=U,\ A\cap\overline{A}=\varnothing$$

であるから，2 により

$$n(U)=n(A)+n(\overline{A})$$



したがって，次の等式が成り立つ。

> 補集合の要素の個数
> $$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$$

場合の数と確率【集合の要素の個数】 p.14～18

青チャートA：例題１～5

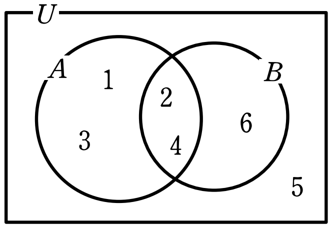
例） 集合 U，A，B について，次の個数を求めよ。

(1)　$n(U)=6$

(2)　$\overline{B}=\{1,\ 3,\ 5\}$ であるから　　$n(\overline{B})=3$

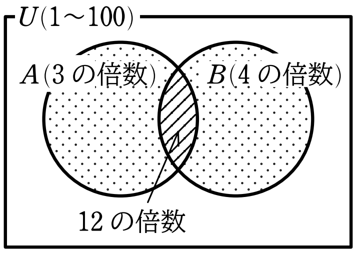
(3)　$A\cap B=\{2,\ 4\}$ であるから　　$n(A\cap B)=2$

(4)　$\overline{A\cup B}=\{5\}$ であるから　　$n(\overline{A\cup B})=1$



○倍数の個数

例題１）　1 から 100 までの整数のうち，3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数は何個あるか。



解答　1 から 100 までの整数のうち，
3 の倍数全体の集合を A，
4 の倍数全体の集合を B とすると，
3 と 4 の少なくとも一方で割り切れる数
全体の集合は $A\cup B$ である。

$$A=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot33\}$$
$$B=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$$

から　　$n(A)=33$，　$n(B)=25$

また，$A\cap B$ は 3 と 4 の最小公倍数 12 の倍数全体の集合であるから

あらかじめ共通部分は求めておくとよい

$$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ 12\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$$

よって　$n(A\cap B)=8$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$
$=33+25-8=50$

答　50 個

1 からではないときは注意！

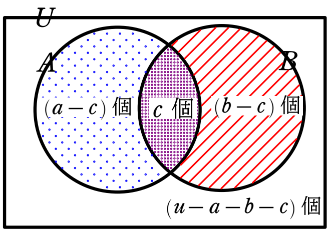
1 から○までの自然数の中に
□の倍数が何個有るかは
○÷□の商からわかる
$100\div3=33\ldots1$
$100\div4=25$
(厳密には $1\leqq 3n\leqq 100$ より
$\frac{1}{3}\leqq n\leqq \frac{100}{3}$
n は整数なので
$1\leqq n\leqq 33$)

個数をはっきりさせるために
□・△の形で書くとよい

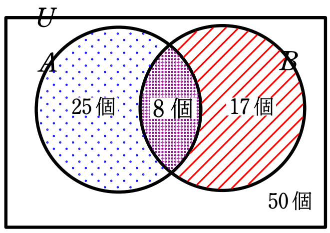
深める　1 から 200 までの整数のうち，5 の倍数であるが，3 の倍数でない数は何個あるだろうか。

深める　100 から 200 までの整数は何個あるか。
また，その中に 3 の倍数は何個あるか。

別解



4つのパーツ ($A\cap\overline{B}$，$A\cap B$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A\cup B}$) のそれぞれの個数を求めて該当の個数を足して求めるのも、ひとつのやり方



場合の数と確率【集合の要素の個数】 p.14～18

青チャートA：例題１～５

例） 和集合，補集合の要素の個数を求める。

全体集合 U の部分集合 A，B について

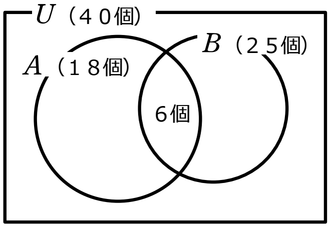
$n(U)=40$，$n(A)=18$，$n(B)=25$，

$n(A\cap B)=6$

であるとき

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=18+25-6=37$

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=40-18=22$ 　終



$18-6=12$
$25-6=19$
$40-12-6-19=3$

練習） 上の例における集合 U，A，B について，次の個数を求めよ。

(1) $n(\overline{B})=n(U)-n(B)=40-25=15$

(2) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=18+25-6=37$

よって　$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)=40-37=3$

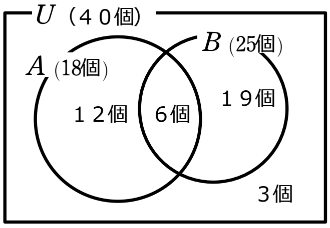
(3) $n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=3$

別解　右図のように個数がわかるので

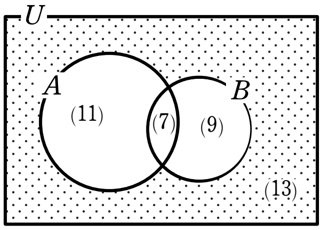
(1) $n(\overline{B})=12+3=15$

(2) $n(\overline{A\cup B})=3$

(3) $n(\overline{A}\cap\overline{B})=n(\overline{A\cup B})=3$



例題３） あるクラスの生徒 40 人について通学方法を調べたところ，電車を利用する生徒は 18 人，自転車を利用する生徒は 16 人，電車と自転車の両方を利用する生徒は 7 人いた。電車も自転車も利用しない生徒は何人いるか。



解答　クラス全員の集合を全体集合 U とし，

電車を利用する生徒の集合を A，

自転車を利用する生徒の集合を B とすると

$n(U)=40$，$n(A)=18$，

$n(B)=16$，$n(A\cap B)=7$

電車も自転車も利用しない生徒の集合は $\overline{A}\cap\overline{B}$ である。

ド・モルガンの法則によりその集合は $\overline{A\cup B}$ で表され，

その要素の個数は

$n(\overline{A\cup B})=n(U)-n(A\cup B)$

ここで　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=18+16-7=27$

よって　$n(\overline{A\cup B})=40-27=13$ 　答　13 人

補足　下のような表（**カルノー図**）を埋めることで求めることもできる，

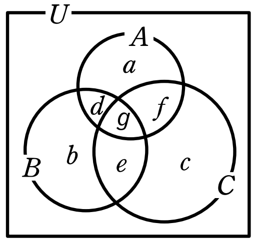
	B ○	B ×	合計
A ○	7	11	18
A ×	9	13	22
合計	16	24	40

網がけが問題からわかること。
後は加減で埋めていく。
太線が和集合の所。

場合の数と確率【集合の要素の個数】 p.14～18

青チャートA: 例題 1～5

研究　3つの集合の和集合の要素の個数



全体集合 U の 3 つの部分集合 A，B，C については，次の等式が成り立つ。

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$$

練習 1）　右の図において，a，b，c，d，e，f，g は，各部分の集合の要素の個数を表す。この図を用いて，上の等式が成り立つことを確かめよ。

解答　$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$

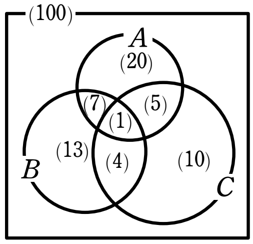
$=(a+d+f+g)+(b+d+e+g)+(c+e+f+g)-(d+g)-(e+g)-(f+g)+g$

$=a+b+c+d+e+f+g=n(A\cup B\cup C)$

よって，与えられた等式は成り立つ。

1 から 100 までの整数のうち，3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数は何個あるか，求めてみよう。1 から 100 までの整数のうち，3 の倍数，4 の倍数，5 の倍数全体の集合を，それぞれ A，B，C とすると，3，4，5 の少なくとも 1 つで割り切れる数全体の集合は $A\cup B\cup C$ である。例題で求めたように

$n(A)=33$，　$n(B)=25$，　$n(A\cap B)=8$



また $C=\{5\cdot1，5\cdot2，5\cdot3，\cdots\cdots，5\cdot20\}$，　$n(C)=20$

$B\cap C=\{20\cdot1，20\cdot2，20\cdot3，20\cdot4，20\cdot5\}$，　$n(B\cap C)=5$

$C\cap A=\{15\cdot1，15\cdot2，15\cdot3，\cdots\cdots，15\cdot6\}$，　$n(C\cap A)=6$

$A\cap B\cap C=\{60\cdot1\}$，　$n(A\cap B\cap C)=1$

したがって，求める個数は

$n(A\cup B\cup C)=33+25+20-8-5-6+1=60$（個）

4STEP例題 1） 集合 U の 2 つの部分集合 A，B に対して，$n(U)=50$，$n(A)=35$，$n(B)=20$ である。このとき，$n(A\cap B)$ の最大値と最小値を求めよ。【青チャート重要例題 3 類題】

方針　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ において，$n(A)=35$，$n(B)=20$ であるから $n(A\cap B)=55-n(A\cup B)$ となり，$n(A\cup B)$ が最大のとき $n(A\cap B)$ は最小となり，$n(A\cup B)$ が最小のとき $n(A\cap B)$ は最大となる。

解答 $n(A\cap B)$ が最大となるのは，$n(B)<n(A)$ であることから，$B\subset A$ のときである。

このとき　$n(A\cap B)=n(B)=20$

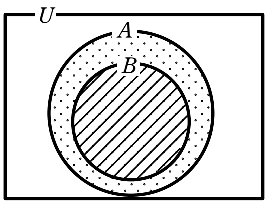
$n(A\cap B)$ が最小となるのは $A\cup B=U$ のときである。

このとき　$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)=35+20-50=5$

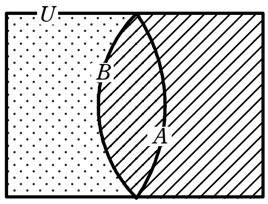
よって　最大値 20，最小値 5

$n(A\cup B)$ が最小のとき $n(A\cap B)$ は最大

全部中に入ったとき



$B\subset A$



$A\cup B=U$

$n(A\cup B)$ が最大のとき $n(A\cap B)$ は最小

できる限り外にでたとき