# 場合の数と確率【場合の数】 p.19～23

青チャートA：例題 6～10

**【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する**

**【内容目標】「樹形図」や「和の法則」「積の法則」を使いこなそう！**

ある事柄が起こる場合の数を知るには，すべての場合を**もれなくかつ重複もなく**数える必要がある。

場合の数や確率を考えるときに重要なこと

ここでは，これから場合の数を求めるときに基本となる和の法則，積の法則について学ぼう。

## ○樹形図

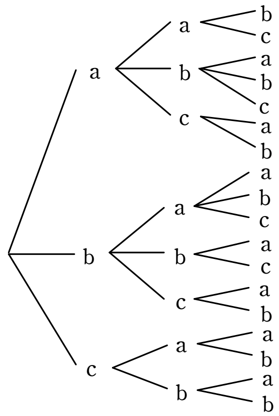
**練習５）** 5 個の文字 a，a，b，b，c から，3 個を選んで 1 列に並べる方法は，何通りあるか。

解答 a，a，b，b，c の 5 文字から 3 文字を選んで 1 列に並べる方法を樹形図で表すと，右のようになる。

よって，すべての場合は

aab，aac，aba，abb，abc，aca，acb，baa，bab，
bac，bba，bbc，bca，bcb，caa，cab，cba，cbb

ゆえに，求める方法は 18 通りである。




何通りあるかを調べてみるときに，右の図のように，次々と枝分かれしていく図でも表すことができる。このような図を **樹形図（tree diagram）** という。
樹形図は，起こりうるすべての場合を，もれも重複もなく数え上げるのに便利である。（規則性があまりないときや条件が変わるときなどに用いよう）

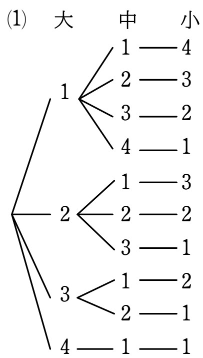
樹形図を使って，起こりうる場合の数を求めてみよう。

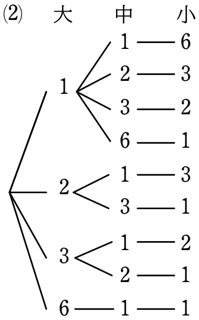
和については後ほど勉強する重複組合せの考えでも求めることができる

**例題５改）** 大中小の 3 個のさいころを投げるとき，次の場合は何通りあるか。

(1) 目の和が 6 になる場合　　(2) 目の積が 6 になる場合

解答 (1) 樹形図により10 通り　　(2) 樹形図により 9 通り




別解 (1)

| 大 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 中 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 小 | 1 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 3 | 2 | 1 |

別解 (2)

| 大 | 6 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 中 | 1 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 3 | 6 |
| 小 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 6 | 3 | 2 | 1 |

表を使うときは固定する行と規則的に変化する行を作ることでもれなく重複無く並べていく

深める 場合の数を数えるとき，一定の方針で数えると，もれなく，重複なく数え上げることができる。練習５，例題５ではどのような方針で数えるとよいか説明してみよう。

練習５ → 英和辞典のようにアルファベット順に並べるとよい
例題５ → 数字の小さい順に並べるとよい

**辞書式配列** という

# 場合の数と確率【場合の数】　p.19～23

青チャートA: 例題 6～10

## ○和の法則

**例１）** 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 4 または 5 になる場合は，何通りあるか求めてみよう。目の和が 4 になるという事柄を A，目の和が 5 になるという事柄を B とする。下のような表を作って調べると

事柄 A が起こるのは　3 通り

事柄 B が起こるのは　4 通り

である。A，B は同時には起こらないから，

A または B が起こる場合は

$$3+4=7$$

すなわち，7 通りである。　終

A

| 大 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 小 | 3 | 2 | 1 |

B

| 大 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 小 | 4 | 3 | 2 | 1 |

一般に，次の 和の法則 が成り立つ。

> **和の法則**
>
> 2 つの事柄 A，B は同時には起こらないとする。　起こり方に重複はない
>
> A の起こり方が $a$ 通りあり，B の起こり方が $b$ 通りある
>
> とすると，A または B が起こる場合は　$a+b$ 通り ある。

和の法則は，3 つ以上の事柄についても，同じように成り立つ。

**練習７）** 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 5 の倍数になる場合は，何通りあるか。

解答　目の和が 5 の倍数 とは，5 または 10 になる場合である。

目の和が 5 になるのは，

(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)

の 4 通り。

目の和が 10 になるのは，

(4，6)，(5，5)，(6，4)

の 3 通り。

よって，和の法則により　$4+3=7$　　答　7 通り

(1 回目，2 回目) のように，出る目を示している。

| 和 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

**「さいころ２個」や「さいころ２回」のときは表を使うとよい**

**問２）** 大小 2 個のさいころを投げるとき，目の和が 4 の倍数になる場合は，何通りあるか。

解答　目の和が 4 または 8 または 12 になる場合である。

目の和が 4 になるのは，(1，3)，(2，2)，(3，1) の 3 通り。

目の和が 8 になるのは，(2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2)，から 5 通り。

目の和が 12 になるのは，(6，6) の 1 通り。

よって，和の法則により　$3+5+1=9$　　答　9 通り

| 和 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

# 場合の数と確率【場合の数】 p.19～23

青チャートA: 例題 6～10

## ○積の法則

一般に，次の 積の法則 が成り立つ。

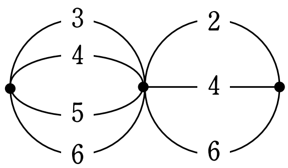
> **積の法則**
>
> 事柄 A の起こり方が $a$ 通りあり，そのおのおの場合について
> 事柄 B の起こり方が $b$ 通りあるとすると，A と B がともに
> 起こる場合は，$a\times b$ 通りある。

積の法則は 3 つ以上の事柄についても，同じように成り立つ。
**※選び終わるまでは掛け続ける！**
**選び終わったものは足す！**

**例題）**大小 2 個のさいころを投げるとき，大きいさいころの目が 3 以上，
小さいさいころの目が偶数である場合は何通りあるか。

解答　大きいさいころで，3 以上の目の出方は 4 通りあり，
そのどの場合に対しても，
小さいさいころで，偶数の目の出方は 3 通りある。
よって，積の法則により　$4\times3=12$　　答　12 通り

道順のように




4(通り) × 3(通り)

**問３）**大中小 3 個のさいころを投げるとき，目の出方は何通りあるか。

解答　1 個のさいころで，目の出方は 6 通りある。
よって，積の法則により　$6\times6\times6=216$　　答　216 通り

| 大 | 中 | 小 |
|---|---|---|
| 1～6 | 1～6 | 1～6 |

6 × 6 × 6

**練習１０）**大中小 3 個のさいころを投げるとき，
すべての目が偶数である場合は何通りあるか。

解答　1 個のさいころで，偶数の目の出方は 3 通りある。
よって，積の法則により　$3\times3\times3=27$　　答　27 通り

| 大 | 中 | 小 |
|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 |
| 4 | 4 | 4 |
| 6 | 6 | 6 |

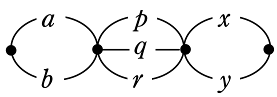
3×3×3

**練習１１）**次の問いに答えよ。

(2) 積 $(a+b)(p+q+r)(x+y)$ を展開すると，項は何個できるか。

解答　展開した式の各項は，$a$，$b$ のうち 1 つ，$p$，$q$，$r$ のうち 1 つ，
$x$，$y$ のうち 1 つの項の積である。
よって，積の法則により　$2\times3\times2=12$　　答　12 個

$(a+b)(p+q+r)(x+y)$




2 × 3 × 2

# 場合の数と確率【場合の数】 p.19～23

青チャートA：例題 6～10

**応用例題１）** 200 の正の約数は何個あるか。

2) 200
2) 100
2) 50
5) 25
5

方針 …約数を調べるときは，素因数分解を利用する。$200=2^3\cdot5^2$ であるから，

200 の正の約数は，$2^3$ の正の約数と，$5^2$ の正の約数の積で表される。

解答 200 を素因数分解すると　$200=2^3\cdot5^2$

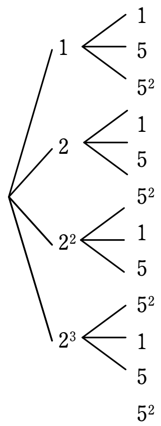
200 の正の約数は，$2^3$ の正の約数と，$5^2$ の正の約数の積で表される。

$2^3$ の正の約数は　1，2，$2^2$，$2^3$ の 4 個

$5^2$ の正の約数は　1，5，$5^2$　の 3 個

よって，200 の正の約数の個数は，積の法則により

$4\times3=12$　答 12 個




補足 200 の正の約数をすべて書き出すと，次のようになる。

$1\cdot1$，$1\cdot5$，$1\cdot5^2$，$2\cdot1$，$2\cdot5$，$2\cdot5^2$，

$2^2\cdot1$，$2^2\cdot5$，$2^2\cdot5^2$，$2^3\cdot1$，$2^3\cdot5$，$2^3\cdot5^2$

これらの約数は，次の式の展開にすべて現れる。

$$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=1\cdot1+1\cdot5+1\cdot5^2+2\cdot1+2\cdot5+2\cdot5^2$$
$$+2^2\cdot1+2^2\cdot5+2^2\cdot5^2+2^3\cdot1+2^3\cdot5+2^3\cdot5^2$$

つまり、展開した項の個数 $4\times3$ が，200 の正の約数の個数に等しい。

また、200 の正の約数の総和は，左辺の（カッコの部分）を計算すればよいので

$(1+2+2^2+2^3)(1+5+5^2)=15\times31=465$　カッコの中から先に計算

まとめると

**注意**
０乗は１
$\square^0=1$

$A^{\bigcirc}\times B^{\triangle}\times C^{\square}$ と因数分解できるとき…　因数分解の因子が増えても同じ

● 正の約数の個数　……　縦に書いて

$$\begin{pmatrix}A^0\\A^1\\A^2\\\cdots\\A^{\bigcirc}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B^0\\B^1\\B^2\\\cdots\\B^{\triangle}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C^0\\C^1\\C^2\\\cdots\\C^{\square}\end{pmatrix}$$

道順のように考えて
$(\bigcirc+1)\times(\triangle+1)\times(\square+1)$ 通り

● 正の約数の総和　……　横に書いて

カッコの中から先に計算

$$(A^0+A^1+A^2+\cdots+A^{\bigcirc})(B^0+B^1+B^2+\cdots+B^{\triangle})(C+C^1+C^2+\cdots+C^{\square})$$

**例題）** 144 について，正の約数は何個あるか。また総和も求めよ。

$144=2^4\cdot3^2$ であるから，

$2^4$ の正の約数は 1，2，$2^2$，$2^3$，$2^4$ の5 個あり，

$3^2$ の正の約数は 1，3，$3^2$ の 3 個ある。

よって，個数は $(4+1)\times(2+1)=5\times3=15$　より 15 個

総和は　$(1+2+4+8+16)(1+3+9)=31\times13=403$

$31\times13=(30+1)\times13=390+13=403$

2) 144
2) 72
2) 36
2) 18
3) 9
3

**工夫①**
平方数で割るのも
ひとつの手段
**工夫②**
式計算で分解
$144=12\times12$
$=3\cdot4\times3\cdot4$
$=2^4\times3^2$

# 場合の数と確率【場合の数】　p.19～23

青チャートA: 例題 6～10

**4STEP数学Ａ　問題３５）** 10 円，50 円，100 円の 3 種類の硬貨を使ってちょうど 250 円支払うには，何通りの支払い方法があるか。ただし，どの硬貨も十分な枚数があり，使わない硬貨があってもよいものとする。【青チャート基本例題10類題】

「すべての硬貨を使って」とあったらどうすればよいか考えよう
→　１枚ずつ使ったときの残額を支払えばよい

解答

10 円，50 円，100 円の硬貨の枚数を，それぞれ $x$，$y$，$z$ とすると，

$x$，$y$，$z$ は 0 以上の整数で　$10x+50y+100z=250$　　不定方程式という

すなわち　$x+5y+10z=25$　…①

ゆえに　$10z=25-(x+5y)\leqq 25$　　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ より　$25-(x+5y)$ は 25 以下

よって　$10z\leqq 25$

$z$ は 0 以上の整数であるから　$z=0$，1，2

[1]　$z=0$ のとき　①より　$x+5y=25$　　$x=5(5-y)\geqq 0$ より $x$ は 5 の倍数で $5-y\geqq 0$

この等式を満たす 0 以上の整数 $x$，$y$ の組は

$(x,\ y)=(0,\ 5)$，$(5,\ 4)$，$(10,\ 3)$，$(15,\ 2)$，$(20,\ 1)$，$(25,\ 0)$　の 6 通り。

[2]　$z=1$ のとき　$x+5y=15$　　$x=5(3-y)\geqq 0$ より $x$ は 5 の倍数で $3-y\geqq 0$

この等式を満たす 0 以上の整数 $x$，$y$ の組は

$(x,\ y)=(0,\ 3)$，$(5,\ 2)$，$(10,\ 1)$，$(15,\ 0)$　の 4 通り。

[3]　$z=2$ のとき　$x+5y=5$　　$x=5(1-y)\geqq 0$ より $x$ は 5 の倍数で $1-y\geqq 0$

この等式を満たす 0 以上の整数 $x$，$y$ の組は

$(x,\ y)=(0,\ 1)$，$(5,\ 0)$　の 2 通り。

以上から，支払い方法の総数は　$6+4+2=12$（通り）　　和の法則

補足　**4STEP数学Ａ　問題３４）** 次の場合，硬貨の一部または全部を使って，ちょうど支払うことができる金額は何通りあるか。方針

(1)　10 円硬貨 4 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 3 枚

異なる硬貨を用いて，同じ金額を表すことはない。　⇒　０枚～すべてを積の法則で。ただしすべて０枚は除く

(2)　10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 3 枚，100 円硬貨 3 枚

５０円２枚で１００円になる　⇒　１００円を両替して、５０円９枚とみる

(3)　10 円硬貨 7 枚，50 円硬貨 1 枚，100 円硬貨 3 枚

１０円５枚で５０円になる　⇒　５０円を両替して、１０円１２枚とみる
１０円１０枚で１００円になる ⇒　１００円を両替して、１０円４２枚とみる