

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】「順列」の基本的な考え方を理解しよう！条件があるときの並べ方を理解しよう！

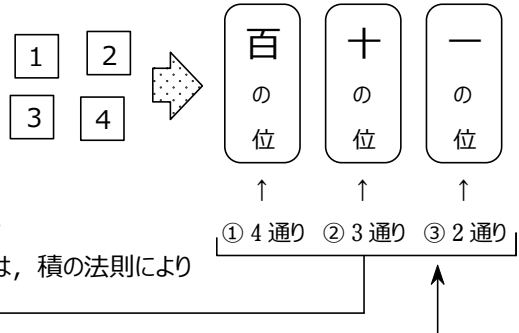
条件に沿った整数の個数を考えよう。辞書式配列の問題の解法を知っておこう

○順列の総数

4 個の数字 1, 2, 3, 4 のうちの異なる 3 個を並べて、3 桁の整数を何個作ることができるかを考えてみる。

百の位から順に数字を決めていこう。

- ① 百の位は、どれでもよいから 4 通り。
- ② 十の位は、①で決めた以外の 3 通り。
- ③ 一の位は、①、②で決めた以外の 2 通り。



したがって、作ることのできる 3 桁の整数の個数は、積の法則により

$$4 \times 3 \times 2 = 24 \text{ すなわち } 24 \text{ 個}$$

である。

どの位から決めてもよい⇒面倒なところ・条件のあるところから決めることが多い

このように、いくつかのものを順に 1 列に並べるとき、その並びの 1 つ 1 つを **順列** という。

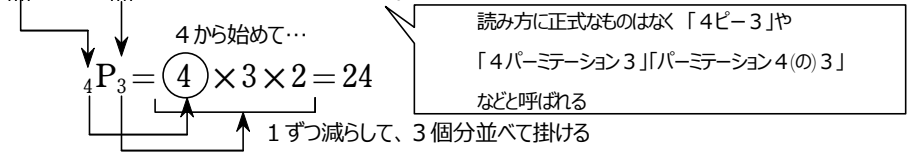
一般に、異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を

n 個から r 個取る順列

といい、その総数を ${}_n P_r$ で表す。ただし、 $r \leq n$ である。

${}_n P_r$ の P は、「順列」を意味する
英語 permutation の頭文字

たとえば、4 個から 3 個取る順列の総数は ${}_4 P_3$ で表され、上で調べたことから次のようになる。



読み方に正式なものはない「4P3」や
「4パーミテーション3」「パーミテーション4(の)3」
などと呼ばれる

一般化 ↓

n 個から r 個取る順列の総数 ${}_n P_r$ についても、次のような結果が得られる。

${}_n P_r = n \cdot (n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

(n) から始めて... 1 ずつ減らして、 r 個分並べて掛ける

| | | | | |
|--------|------------|------------|-------|------------------|
| 1 番目 | 2 番目 | 3 番目 | | r 番目 |
| ○ | ○ | ○ | | ○ |
| n 通り | $(n-1)$ 通り | $(n-2)$ 通り | | $\{n-(r-1)\}$ 通り |
| | | | | |
| | | | | $n-r+1$ |

← ($r-1$) 番目までに並べたものの残りで $\{n-(r-1)\}$ 通り

練習 1 3 改) 次の値を求めよ。

(1) ${}^9P_3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$
 3個並べて掛ける

(2) ${}^7P_5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$
 5個並べて掛ける

(3) ${}^6P_1 = 6$
 1個並べて掛ける

(4) ${}^6P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$
 6個並べて掛ける

練習 1 4) 次のものの総数を求めよ。

(1) 7人の生徒から 3人を選んで1列に並べる 順列の合図
 異なる7個のものから 異なる3個のものを選んで並べると、読み取れるので
 $\therefore {}^7P_3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ (通り)

(2) 1から9までの9個の数字から 異なる4個を並べて作る 4桁の整数
 異なる9個のものから 異なる4個のものを選んで並べると、読み取れるので
 $\therefore {}^9P_4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ (個)

順列の総数 ${}_n P_r$ の式で、とくに $r = n$ のときは、等式

$${}_n P_n = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{1}$$

が得られる。

この等式の右辺は、1からnまでのすべての自然数の積である。

これをnの階乗といい、 $n!$ で表す。 factorial とも言う。「nの階乗」「nファクトリアル」

$${}_n P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

nから1までの積

一般に、『異なるn個すべてを並べる順列の総数は $n!$ 通り』である。

練習 1 5) 6人全員を1列に並べるときの並べ方の総数

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

『 $5! = 120$ 』は暗記しておく。すると、
 $6! = 6 \cdot 5!$
 $= 6 \cdot 120$
 $= 720$
 と計算できる。

${}_n P_r$ を階乗の記号を用いて表してみよう。

$r < n$ のとき、 ${}_n P_r$ を求める式は、次のように変形される。

$$\begin{aligned} {}_n P_r &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1) \cdot \underbrace{(n-r)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{(n-r)!}}{(n-r)!} \end{aligned}$$

分母分子に同じものを掛ける

ゆえに

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

等式 ① において $r = n$ としてみると、 ${}_n P_n = \frac{n!}{0!}$ となる。

そこで、 $r = n$ のときにも ① が成り立つように、 $0! = 1$ と定める。

更に、 $r = 0$ のときにも ① が成り立つように、 ${}_n P_0 = 1$ と定める。

□ 順列の考え方の利用

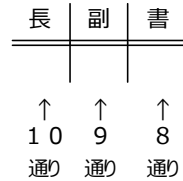
例題 6) 10 人の委員の中から委員長, 副委員長, 書記を 1 人ずつ選ぶ方法は, 何通りあるか。

ただし, 兼任は認めないものとする。

解答 委員長, 副委員長, 書記を 1 人ずつ選ぶ方法の総数は,

10 人の中から 3 人を選んで, この順に並べる順列の総数と考えられるから

$${}_{10}P_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720 \quad \text{答 } 720 \text{ 通り}$$



練習 16) 8 人の中からリレーに出場する 4 人の選手を選ぶ。第 1 走者, 第 2 走者, 第 3 走者, 第 4 走者の 4 人を決める方法は, 何通りあるか。

解答 8 人から 4 人選んで 1 列に並べる順列の総数と同じである。

よって, 走者の決め方の総数は

$${}_8P_4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680 \quad \text{答 } 1680 \text{ 通り}$$



方針 … 【重要】 条件があるときは先に考えよう！
 そのあと残りの部分の並べ方を考えて, 積の法則でまとめよう。

応用例題 2 改) 大人 4 人と子ども 3 人が 1 列に並ぶとき, 次のような並び方は何通りあるか。

(1) 両端が大人である。

解答 まず両端の大人 2 人並び方を考える。

4 人の大人から 2 人選んで左端, 右端と順番に並べれば良いので ${}_4P_2$ 通り



間には残り 5 人全員を並べれば良いので $5!$ 通りある。

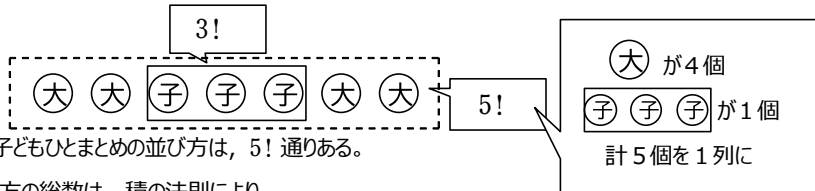
よって, 並び方の総数は, 積の法則により

$${}_4P_2 \times 5! = 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12 \times 12 \times 10 = 1440 \quad \text{答 } 1440 \text{ 通り}$$

$$12^2 = 144$$

(2) 子どもが 3 人が続いて並ぶ。

解答 まず子ども 3 人をひとまとめにする。子ども 3 人の並び方は, $3!$ 通りある。



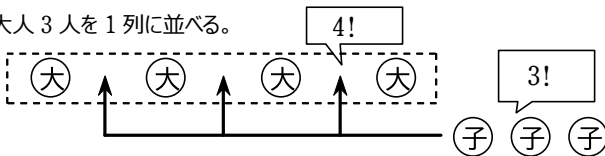
大人 4 人と子どもひとまとめの並び方は, $5!$ 通りある。

よって, 並び方の総数は, 積の法則により

$$5! \times 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \times 6 = 720 \quad \text{答 } 720 \text{ 通り}$$

問4改) 大人4人と子ども3人が1列に並ぶとき、大人と子どもが交互に並ぶような並び方は、何通りあるか。

【解答】 まず、大人3人を1列に並べる。



大人の間の3か所に子ども3人を並べればよい。

よって、求める並べ方の総数は、積の法則により

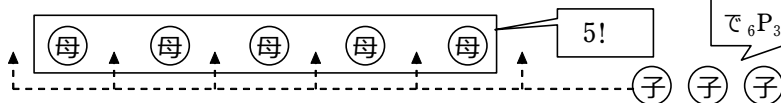
$$4! \times 3! = 24 \times 6 = 144 \quad \text{答 } 144 \text{ 通り}$$

他にもいろいろなパターンがある。
代表的な問題は必ず解けるよう!
あとはいろいろな問題を目にして慣れておこう

例) 母音 a, i, u, e, o と子音 k, s, t の8個を1列に並べるとき、

子音3個が隣り合わない並べ方は何通りあるか。←ちょっと工夫して考える問題

【解答】 ひとまとめにした母音5個の並べ方は、5! 通りある。



よって、並べ方の総数は、積の法則により

$$5! \times {}_6P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 \times 12 \times 10 = 14400 \quad \text{答 } 14400 \text{ 通り}$$

6カ所から3カ所選んで順に並んでいくので ${}_6P_3$ 通り

応用例題3) 6個の数字0, 1, 2, 3, 4, 5を使ってできる、次のような整数は何個あるか。

ただし、同じ数字は2度以上使わないものとする。

- (1) 4桁の整数 (2) 両端の数字が奇数である6桁の整数

【解説】 制限がある部分から考える。

(1) 4桁の整数であるから千の位は0でない。そこで、千の位から考える。

(2) 両端から考える。

【解答】 (1) 千の位は0以外の数字1, 2, 3, 4, 5の

どれかであるから、その選び方は 5通り

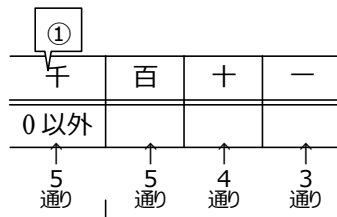
百, 十, 一の位には残りの5個の数字から3個取って並べる

から、その並べ方は ${}_5P_3$ 通り

したがって、求める整数の個数は、積の法則により

$$5 \times {}_5P_3 = 5 \times 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300 \quad \text{答 } 300 \text{ 個}$$

迷ったら実際に操作(実験)してみる



千の位で使った数字以外の5個で3桁の整数を作る ${}_5P_3$

(2) 両端には奇数1, 3, 5から2個取って

並べるから、その並べ方は ${}_3P_2$ 通り

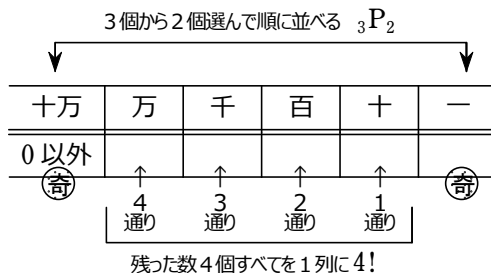
間の4つの位には残りの4個の

数字を並べるから、その並べ方は

4! 通り

したがって、求める整数の個数は、積の法則により

$${}_3P_2 \times 4! = 3 \cdot 2 \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 144 \quad \text{答 } 144 \text{ 個}$$



残った数4個すべてを1列に4!

深める 応用例題 3(1) を、「6 個の数字から 4 個を取って並べる順列から、4 桁の整数にならないものを除く」と考えて、解いてみよう。

解答 6 個の数字から 4 個を取って並べる順列のうち、千の位の数字が 0 であるときは 4 桁の整数にならない。千の位が 0 であるとき、百、十、一の位には 0 以外の 5 個の数字から 3 個を取って並べる。よって、4 桁の整数の個数は

$${}_6P_4 - {}_5P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 - 60 = 300 \quad \text{答} \quad 300 \text{ 通り}$$

練習 18 6 個の数字 0, 1, 2, 3, 4, 5 を使ってできる、次のような整数は何個あるか。

ただし、同じ数字は 2 度以上使わないものとする。

- (1) 4 桁の奇数 (2) 4 桁の偶数

解答

一の位は奇数でなければいけないので 1, 3, 5 の 3 通り。

千の位は「一の位で使った数」と「0」以外の数字のどれかであるから選択枝が 2 個減るので選び方は 4 通り。

十の位、一の位には、残り 4 個の数字から並べる。

よって、求める個数は、積の法則により

$$3 \times 4 \times 4 \times 3 = 144 \quad \text{答} \quad 144 \text{ 個}$$

- (2) 4 桁の偶数

解答 4 桁の偶数は、4 桁の整数から 4 桁の奇数を除いたものである。4 桁の整数の個数は

$$5 \times {}_5P_3 = 300$$

応用例題 3(1) より

よって、4 桁の偶数の個数は

$$300 - 144 = 156 \quad \text{答} \quad 156 \text{ 個}$$

別解 (2) 一の位は、数字 0, 2, 4 のどれかである。

- [1] 一の位の数字が 0 の場合

千、百、十の位には残り 5 個の数字から 3 個取って並べるから、その並べ方は

$${}_5P_3 \text{ 通り}$$

- [2] 一の位の数字が 2, 4 の場合

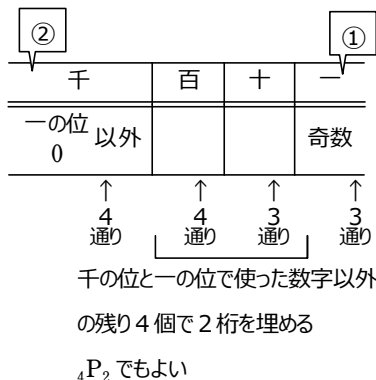
千の位は 0 と一の位に並べた数字以外の 4 個の数字のどれかであるから、その選び方は 4 通り

百、十の位には 0 を含めた残り 4 個の数字から 2 個取って並べるから、その並べ方は

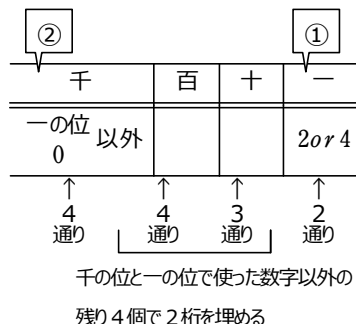
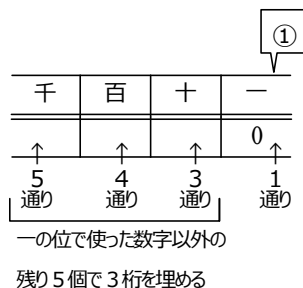
$${}_4P_2 \text{ 通り}$$

したがって、4 桁の偶数の個数は、和の法則と積の法則により

$${}_5P_3 + 2 \times 4 \times {}_4P_2 = 60 + 96 = 156 \quad \text{答} \quad 156 \text{ 個}$$



(すべて) = (偶数) + (奇数) なので
(偶数) = (すべて) - (奇数)



○辞書式配列

このような問題を「辞書式配列」という

4STEP数学A 例題8) A, B, C, D, Eの5文字をすべて使っている順列を、ABCDEを1番目として、辞書式に並べるとき、次の問いに答えよ。

- (1) 15番目の文字列を求めよ。 (2) CBEADは何番目の文字列か。

【青チャート基本例題14類題】

解答

(1) AB○○○, AC○○○の形の文字列は、それぞれ $3! = 6$ (個) ずつ、合わせて12個あるから、15番目の文字列はAD○○○の形の文字列の3番目である。

順に書き並べてみると ADBCE, ADBEC, ADCBE, ……

よって、15番目の文字列は ADCBE

(2) A○○○○の形の文字列は ○に残り4文字を並べるので 4! 個

B○○○○の形の文字列は ○に残り4文字を並べるので 4! 個

CA○○○の形の文字列は ○に残り3文字を並べるので 3! 個

CBA○○の形の文字列は ○に残り2文字を並べるので 2! 個

CBD○○の形の文字列は ○に残り2文字を並べるので 2! 個

また、CBEADはCBE○○の形の文字列の1番目である。

よって、CBEADは $4! + 4! + 3! + 2! + 2! + 1 = 59$ (番目)

別解 A=1, B=2, C=3, D=4, E=5とみて考える解き方

(1) 12○○○, 13○○○の形の文字列は、それぞれ $3! = 6$ (個) ずつ、合わせて12個あるから、15番目の文字列は14○○○の形の文字列の3番目である。

順に書き並べてみると 14235, 14253, 14325, ……

よって、15番目の文字列は 14325 つまり ADCBE

CBEAD = 32514 が何番目が考えてもよい

(2) 1○○○○の形の文字列は ○に残り4文字を並べるので 4! 個

2○○○○の形の文字列は ○に残り4文字を並べるので 4! 個

31○○○の形の文字列は ○に残り3文字を並べるので 3! 個

321○○の形の文字列は ○に残り2文字を並べるので 2! 個

324○○の形の文字列は ○に残り2文字を並べるので 2! 個

また、32514は325○○の形の文字列の1番目である。

よって、32514は $4! + 4! + 3! + 2! + 2! + 1 = 59$ (番目)