## 場合の数と確率【円順列・重複順列】 p.29～31

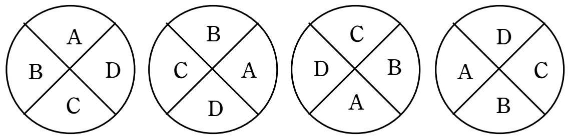
青チャートA: 例題 17～21

**【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する**

**【内容目標】円順列や重複順列をマスターしよう**

### □円順列

ものを円形に並べる順列を **円順列** という。円順列では，適当に回転して並びが同じになれば同じ順列とみなす。例えば図のように円盤を 4 等分した各部分を，A，B，C，D の4 色すべてを使って塗り分けるとき，図の4 つは円順列として同じ 1 つの順列である。




**考え方①** 同じ並び方になる個数に着目する

まず全てを 1 列に並べる。この列の両端をつなげて円の形にして、回転して同じものができる数の分（円に配置したものの数の分）だけ割り算で減らすと考えると次のようになる。

$$\frac{4!}{4}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4}=3\cdot 2\cdot 1=6 \quad （通り）$$

同じ並び方になる個数で割る方法。
この考え方は応用問題で用いることがある。

**考え方②** 1 人を基準にして考える

A に着目して A に続く色の並びを反時計回りの順に並べると考えると，着目した 1 個を除いた残り 3 個の順列の総数に等しく，次のようになる。

$$(4-1)!=3!=3\cdot 2\cdot 1=6 \quad （通り）$$

固定することで円にしない方法

異なる $n$ 個の円順列の総数については，次のことがいえる。

**円順列の総数**

**異なる $n$ 個の円順列の総数は** $\dfrac{{}_n\mathrm{P}_n}{n}=(n-1)!$ **通り**

$n$ 個**全て**を円形に並べるときは
1 少ない階乗を計算する

**練習１９）** 6 人が 6 人用の円卓を囲んで座るとき，並び方は何通りあるか。

よって，並び方の総数は $(6-1)!=5!=5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ （通り）

**問５）** A，B，C，D，E の 5 人が輪の形に並ぶとき，A と B が隣り合うような並び方は，何通りあるか。

条件は先に考える

解答 A，B 2 人をひとまとめにすると，並び方は 2! 通りある。

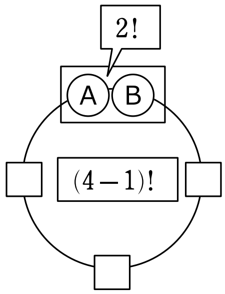
残り 3 人と AB ひとまとめの円順列の総数は，

$(4-1)!$ 通りある。

よって，並び方の総数は，積の法則により

$(4-1)!\times 2!=3\cdot 2\cdot 1\times 2\cdot 1=12$

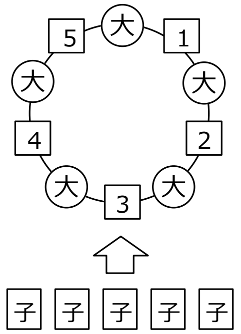
答 12 通り



# 場合の数と確率【円順列・重複順列】 p.29～31

青チャートA: 例題 17～21

**例題）** 大人 5 人と子ども 5 人が輪の形に並ぶとき，大人と子どもが交互に並ぶような並び方は何通りあるか。




子どもは並んだ順に１～５に入っていく

（円順列ではない！）

解答 まず，大人を円形に並べる。

大人 5 人の円順列の総数は，$(5-1)!$ 通り。

次に，子ども 5 人が並んだ順に大人の間に入っていくと考えると

$5!$ 通り。

よって，並び方の総数は，積の法則により

$(5-1)!\times5!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=2880$

答 2880 通り

## □重複順列（ちょうふくじゅんれつ、じゅうふくじゅんれつ）

これまでは，異なるものだけを並べる順列を考えてきた。ここでは，**同じものを繰り返し使うことを許した場合の順列**を考えてみよう。

記号○と×を，重複を許して 5 個並べるとする。このとき，右の図のように，5 個のどの場所にも，○と×のどちらを置いてもよい。

| ○ | × | ○ | × | × |
|---|---|---|---|---|
| ↑ | ↑ | ↑ | ↑ | ↑ |
| 2 通り | 2 通り | 2 通り | 2 通り | 2 通り |

したがって，この順列の総数は，積の法則により $2\times2\times2\times2\times2=32$ (通り)

一般に，**異なる $n$ 個のものから重複を許して $r$ 個取って**並べる順列を，$n$ 個から $r$ 個取る **重複順列** という。

重複順列では，$r\leqq n$ とは限らず，$r>n$ であってもよい。

重複順列の公式として『$n$ 個から $r$ 個取る重複順列の総数は $n^r$ 通り』があるが、公式の暗記にならないようにする（間違える人が多い）

**例６）** 5 個の数字 1，2，3，4，5 を重複を許して 4 桁の整数を作るとき，何個の整数が作れるか。

解答

| 千 | 百 | 十 | 一 |
|---|---|---|---|
| 1 or 2 or 3 or 4 or 5 | 1 or 2 or 3 or 4 or 5 | 1 or 2 or 3 or 4 or 5 | 1 or 2 or 3 or 4 or 5 |
| ↑<br>5<br>通り | ↑<br>5<br>通り | ↑<br>5<br>通り | ↑<br>5<br>通り |

$5\times5\times5\times5=5^4=625$ すなわち 625 個 終

**『$n$ 個の選択を $r$ 回繰り返す 重複順列の総数は $n^r$ 通り』**

## 場合の数と確率【円順列・重複順列】 p.29～31 青チャートA: 例題 17～21

**例題７）** 5 人を，2 つの部屋 A，B に入れる方法は何通りあるか。

ただし，1 人も入らない部屋があってもよいものとする。

解答 5 人それぞれについて，入る部屋は A，B のどちらかであるから，その選び方は 2 通りある。

よって，求める総数は，2 個から 5 個取る重複順列の総数に等しいから

$2^5=32$

答 32 通り

これを ${}_5C_0+{}_5C_1+{}_5C_2+{}_5C_3+{}_5C_4+{}_5C_5$ から求めることもできるが，

そのままだと面倒な計算となってしまう。そこで二項定理から

$(a+b)^5={}_5C_0a^5+{}_5C_1a^4b+{}_5C_2a^3b^2+{}_5C_3a^2b^3+{}_5C_4ab^4+{}_5C_5b^5$

として， $a=b=1$ とすると $(1+1)^5=2^5=32$ となる。

**深める** 5 人を 2 つのグループ A，B に分ける方法は何通りあるか。隣の人と考え方を共有しよう。

解答 5 人それぞれについて，入るグループは A，B のどちらかであるから，

2 個から 5 個取る重複順列の総数より $2^5=32$

ここから A，B のどちらかが 0 人になる場合を除いて

$32-2=30$ 答 30 通り

※Aだけ，Bだけと片方だけに入ってしまうと、2 つのグループに分けたことにならないので，

その分の 2 通りを引く必要がある。

### ○じゅず順列（数珠順列）

回転だけでなく、首飾りや腕輪、ブレスレット、ネックレスなど裏返すことができるものについては注意

異なる $n$ 個のもののじゅず順列の総数は $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 2 で割って裏表の区別をなくす

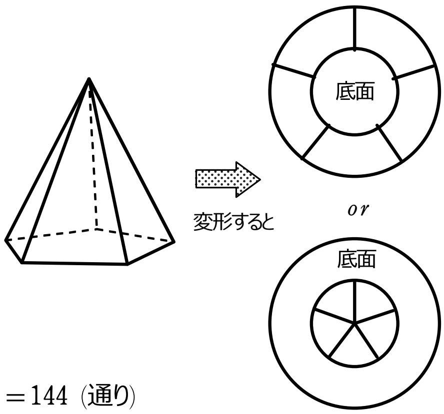
**4STEP数学Ａ 問題５７）** 色の異なる 7 個の玉を糸でつないで首飾りにする方法は何通りあるか。

解答 7 個の玉の円順列を作ると，裏返して同じになるものが 2 個ずつできる。

よって $\dfrac{(7-1)!}{2}=360$ 答 360 通り

### ○塗り分け問題への応用

4STEP数学Ａ 例題９）正五角錐の 6 つの面を赤，青，黄，緑，紫，白の 6 色すべてを使って塗り分ける方法は何通りあるか。




解答 底面の色の塗り方は 6 通り

そのおのおのに対して，

側面の色は残り 5 色の円順列で $(5-1)!$ 通り

よって，求める塗り分け方は $6\times(5-1)!=6\times24=144$ (通り)