場合の数と確率【組合せ】 p.32～36

青チャートA: 例題 22～26

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】組合せの基本をマスターしよう。組分けや同じものを含む順列の考えを身に付けよう。

□組合せの総数

4 個の文字 a，b，c，d から，異なる 3 個を取り出して文字の組を作ると，次のような組が作れる。

{a，b，c}，{a，b，d}，{a，c，d}，{b，c，d}　…… ①

このように，ものを取り出す順序を無視した組を作るとき，これらの組の 1 つ 1 つを **組合せ** という。

一般に，異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して作る組合せを『n 個から r 個取る組合せ』といい，その総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ で表す＊。ただし，$r \leqq n$ である。

＊ ${}_n\mathrm{C}_r$ の C は，「組合せ」を意味する英語 combination の頭文字である。

たとえば，4 個から 3 個取る組合せの総数は ${}_4\mathrm{C}_3$ で表される。

「４シー３」や「シーの４，３」「４コンビネーション３」「コンビネーション４(の)３」などと呼ばれる

${}_4\mathrm{C}_3$ の値は，次のように考えても求められる。

① の組の 1 つ，例えば {a，b，c} について，その 3 文字 a，b，c すべてを並べてできる順列は 3! 通りある。これは，他のどの組についても同じであるから，全体では ${}_4\mathrm{C}_3 \times 3!$ 通りの順列が得られる。この総数は，4 個から 3 個取る順列の総数と一致するから

組合せ		順列
{a，b，c}	⟷	abc　acb bac　bca cab　cba
1 組		3! 通り

←${}_4\mathrm{C}_3$ 個→

abc	abd	acd	bcd
acd	adb	adc	bdc
bac	bad	cad	cbd
bca	bda	cda	cdb
cab	dab	dac	dbc
cba	dba	dca	dcb

3! 個

↑全部で ${}_4\mathrm{P}_3$ 個

$${}_4\mathrm{C}_3 \times 3! = {}_4\mathrm{P}_3$$

ゆえに　$${}_4\mathrm{C}_3 = \frac{{}_4\mathrm{P}_3}{3!} = \frac{4\cdot3\cdot2}{3\cdot2\cdot1} = 4$$

重要：『「順列：選んで並べる」＝「組合せ：選ぶ」×「階乗：並べる」』

$${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \times r!$$

「順列」は、「組合せ」と「階乗」の両方を行っている（選んで並べている）

つまり，n 個から r 個取る組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$ については，${}_n\mathrm{C}_r \times r! = {}_n\mathrm{P}_r$ となるから

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$$

したがって，${}_n\mathrm{C}_r$ は次の式で表される。

組合せの総数 ${}_n\mathrm{C}_r$

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}$$

${}_n\mathrm{C}_r$ は，分母も 分子も r 個の数の積 **（同じ数だけ並べる！）**

＜注意＞ とくに，${}_n\mathrm{C}_1 = n$（n 個から 1 個選ぶときは，n 通り）

${}_n\mathrm{C}_n = 1$ である。（n 個から n 個選ぶときは，1 通り）

また，$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r \times (n-r)!}{r! \times (n-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ とも表される。

ただし，$r=0$ とおくと ${}_n\mathrm{C}_0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = \dfrac{1}{0!}$ なので ${}_n\mathrm{C}_0 = 1$ と定める。

$0! = 1$

場合の数と確率【組合せ】 p.32～36

青チャートA: 例題 22～26

練習２４） 次の値を求めよ。

解答 (1) ${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ (2) ${}_6C_4=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=15$

(3) ${}_4C_1=4$ (4) ${}_6C_6=1$

分母から書くと
項の数を間違いにくい

例題） 次のような選び方の総数を求めよ。

(1) 8 人から 2 人を選ぶ。 (2) 9 色から 4 色を選ぶ。

解答 (1) ${}_8C_2=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$（通り） (2) ${}_9C_4=\dfrac{9\cdot8\cdot7\cdot6}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=126$（通り）

□${}_nC_r$ の性質

5 人から 3 人を選ぶことは，選ばない 2 人を決めることと結果的には同じである。

よって，次の等式が成り立つ。

$${}_5C_3={}_5C_2$$

選ぶ 3 人の組	選ばない 2 人の組
{a，b，c}	{d，e}
{a，b，d}	{c，e}
{a，b，e}	{c，d}
⋮	⋮
${}_5C_3$ 個 ＝	${}_5C_2$ 個

一般に，n 個から r 個取る組合せの総数は，

n 個から $(n-r)$ 個取る組合せの総数に等しい。すなわち，次の等式が成り立つ。

${}_nC_r$ の性質

${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ただし $0\leqq r\leqq n$

${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ ただし $1\leqq r\leqq n-1$，$n\geqq2$

$\triangle+\square=\bigcirc$

${}_{\bigcirc}C_{\triangle}={}_{\bigcirc}C_{\square}$

後ろの数 r が前の数 n の
半分以上なら小さくして計算

例８） ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ を使って，${}_{12}C_9$ を求める。

$${}_{12}C_9={}_{12}C_{12-9}={}_{12}C_3=\frac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220 \quad \text{終}$$

$${}_nC_{n-r}=\frac{n!}{(n-r)!\{n-(n-r)\}!}=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}={}_nC_r$$

練習２５） 次の値を求めよ。

解答 (1) ${}_9C_8={}_9C_1=9$

(2) ${}_7C_5={}_7C_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}=21$

(3) ${}_{16}C_{13}={}_{16}C_3=\dfrac{16\cdot15\cdot14}{3\cdot2\cdot1}=560$

そのまま計算すると項数が多くなる
場合は、減らして計算しよう

問６） ${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ が成り立つことを，次の考え方を用いて説明せよ。

異なる n 個のものの中から異なる r 個を取り出すとき，取り出した r 個の中に，
特定の 1 個を含む場合と，含まない場合がある。

解答 異なる n 個のものの中から異なる r 個を取り出すとき，

[1] r 個の中に特定の 1 個 a を含む場合は，まず a を取り出し，残りの $(n-1)$ 個の中から $(r-1)$ 個を取り 出す場合で，${}_{n-1}C_{r-1}$ 通りある。

[2] r 個の中に特定の 1 個 a を含まない場合は，a を除く $(n-1)$ 個の中から r 個を取り出す場合で，${}_{n-1}C_r$ 通りある。

[1] と [2] の場合の数を加えると，${}_nC_r$ となる。

したがって，${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r$ である。

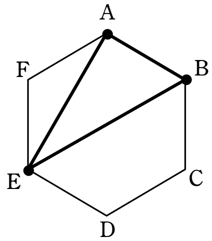
$$\begin{aligned}
{}_{n-1}C_{r-1}+{}_{n-1}C_r&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r+1)!}+\frac{(n-1)!}{r!(n-1-r)!}\\
&=\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-1-r)!}\left(\frac{1}{n-r}+\frac{1}{r}\right)\\
&=\frac{(n-1)!\,n}{(r-1)!(n-1-r)!\,r(n-r)}\\
&=\frac{n!}{r!(n-r)!}={}_nC_r
\end{aligned}$$

場合の数と確率【組合せ】　p.32～36

青チャートA: 例題 22～26

□組合せの考え方の利用

例題９改） 正六角形について，次の数を求めよ。

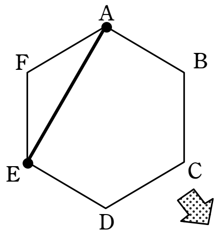


(1) 3 個の頂点を結んでできる三角形の個数

解答　3 個の点を 1 組決めると三角形が 1 個作れる。

よって，できる三角形の個数は

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$$　答　20 個

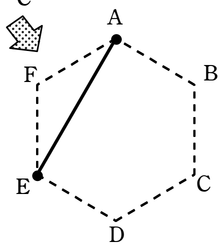


(2) 2 個の頂点を結ぶ線分の本数

解答　2 個の点を 1 組決めると線分が 1 本できる。

よって，できる線分の本数は

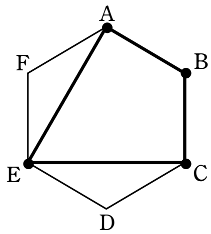
$${}_6C_2=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$$　答　15 本



(3) 対角線の本数

解答　(2) で求めたものから辺の数 6 を引けばよいから

$15-6=9$　答　9 本

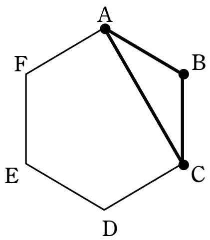


(4) 4 個の頂点を結んでできる四角形の個数

解答　4 個の点を 1 組決めると四角形が 1 個作れる。

よって，できる四角形の個数は

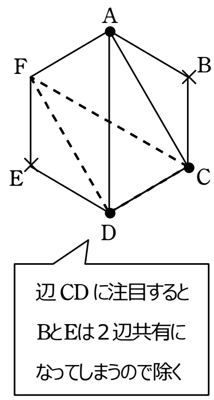
$${}_6C_4={}_6C_2=15$$　答　15 個



(ex1) 正六角形と 2 辺を共有する三角形の個数

解答　１つの頂点に対し、２辺を共有する三角形が１つできるので

頂点の数と等しい　答　6 個



(ex2) 正六角形と 1 辺を共有する三角形の個数

解答　１つの辺に対し、１辺を共有する三角形が２つできるので

辺の本数×２と等しい　$6\times2=12$　答　12 個

(ex3) 正六角形と辺を共有しない三角形の個数

解答　（三角形の総数）＝（１辺共有）＋（２辺共有）＋（共有しない）

なので

（共有しない）＝（三角形の総数）－（１辺共有）－（２辺共有）

(1)より　$20-6-12=2$　答　2 個

応用例題４改） 大人 10 人，子ども 6 人の中から 5 人を選ぶとき，次のような選び方は，それぞれ何通りあるか。

(1) すべての選び方

解答　合計 16 人から 5 人選ぶ選び方なので

大人、子どもの区別をしない

$${}_{16}C_5=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=4368$$

答 4368 通り

(2) 大人 3 人と子ども 2 人を選ぶ。

大人と子どもを別々に選び，積の法則を利用する。

解答　大人 10 人から 3 人選び、子ども 6 人から 2 人選ぶ選び方なので

よって，求める組の総数は，積の法則により

言葉を補足できると間違わない

$${}_{10}C_3\times{}_{6}C_2=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=1800$$

答　1800 通り

(3) 大人が少なくとも 1 人含まれるように選ぶ。

「少なくとも 1 人」は「1 人以上」ということである。
(総数)－(大人が 1 人も含まれない組の数)を求めればよい。

解答　16 人全員から 5 人を選ぶ方法は ${}_{16}C_5$ 通りある。

5 人とも子どもを選ぶ方法は ${}_{6}C_5$ 通りある。

よって，求める選び方の総数は

$${}_{16}C_5-{}_{6}C_5={}_{16}C_5-{}_{6}C_1=\frac{16\cdot15\cdot14\cdot13\cdot12}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}-6$$

$$=4368-6=4362$$

答　4362 通り

大	子
~~0~~	~~5~~
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0

大人が少なくとも
1 人含まれる
→5 回計算する
のは面倒

(4) 大人，子どもから少なくとも 1 人ずつ選ぶ。

解答　大人，子どもから少なくとも 1 人ずつ選ぶ方法は

$$4368-(6+252)=4110\ (\text{通り})$$

答　4110 通り

$${}_{10}C_5=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=252$$

大	子
~~0~~	~~5~~
1	4
2	3
3	2
4	1
~~5~~	~~0~~

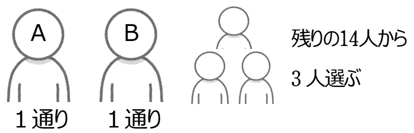
大人、子どもから
少なくとも 1 人
含まれる

(5) 特定の 2 人 A，B がともに選ばれる。

解答　A，B の 2 人を先に選んでおき，（それぞれ 1 通り）

残りの 14 人から 3 人を選ぶと考えて

$$1\times1\times{}_{14}C_3=\frac{14\cdot13\cdot12}{3\cdot2\cdot1}=364\ (\text{通り})$$

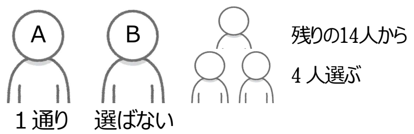


(6) A は選ばれ，B は選ばれない。

解答　A を先に選んでおき，

A，B を除いた 14 人から残りの 4 人を選ぶと考えて

$$1\times1\times{}_{14}C_4=\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=1001\ (\text{通り})$$



場合の数と確率【組合せ】　p.32〜36

青チャートA: 例題 22〜26

□組分けの総数

人やものを組分けするときの分け方の総数を求めてみよう。

応用例題５） 7 人を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1)　部屋 A，B，C に 2 人ずつ入れ，部屋 D に 1 人入れる。

解答

部屋 A に入れる 2 人の選び方は ${}_7C_2$ 通りある。

部屋 B に入れる 2 人の選び方は

残りの 5 人から選ぶので ${}_5C_2$ 通り，

部屋 C に入れる 2 人の選び方は

残りの 3 人から選ぶので ${}_3C_2$ 通りある。

部屋 A，B，C の人が決まれば，

残りの部屋 D の 1 人は自動的に決まる。

自動的に決まるなら 1 通り

よって，分け方の総数は，積の法則により

$$ {}_7C_2 \times {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} \times \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1} \times \frac{3\cdot 2}{2\cdot 1} \times 1 = 630 $$

答　630 通り

{a，b}，{c，d}，{e，f}

↓	↓	↓
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

3! 通り

(2)　2 人，2 人，2 人，1 人の 4 組に分ける。

解答　(1) で，A，B，C の区別をなくすと，3! 通りずつ同じ組ができる。

よって，分け方の総数は

$$ \frac{630}{3!} = \frac{630}{6} = 105 $$

答　105 通り

部屋 D は人数が違うので
区別がつくと考える

同じ人数のグループについて
名前などが付いていなければ
区別が付かないとみる
⇒区別が付かない組の数の
階乗で割る！

(ex)　4 人，2 人，1 人の 3 つの組に分ける。

解答　A　4 人，B　2 人，C　1 人の 3 つの組に分けることを考える。

少ない人数から選ぶと

$$ {}_7C_1 \times {}_6C_2 \times {}_4C_4 = 7 \times \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} \times 1 = 105 $$

答　105 通り

同じ人数がいなければ
区別が付く

人数が少ない方から
選ぶと良い