場合の数と確率【同じものを含む順列など】 p.37～40

青チャートA: 例題 27～30,32～34

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】同じものを含む順列や最短経路問題、重複組合せの考えを身に付けよう

□同じものを含む順列

例９）　a が 3 個，b が 2 個，c が 1 個の全部を 1 列に並べる順列を考える。

ⓐ □ ⓐ □ ⓐ □　　同じ文字は区別が付かないとみる

ⓑ ⓑ ⓒ　空いている場所 □に入れる

【考え方】　[1]　6 個の場所から a を置く 3 個の選び方は，$_6C_3$ 通り。

[2]　残り 3 個の場所から b を置く 2 個の選び方は，$_3C_2$ 通り。

[3]　a，b の置き方が決まれば，残り 1 個の c の置き方は決まる（$_1C_1$ 通り）。

よって，このような順列の総数は，積の法則により

$$_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{3\cdot2}{2\cdot1}\times\frac{1}{1}=60\ \text{(通り)}$$

式を整理すると $\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1\times1}=\dfrac{6!}{3!\,2!\,1!}$ と変形できる

分子は区別なくして合計の階乗

解き方その２

分母は同じもの個数の階乗

一般に，n 個のもののうち，p 個は同じもの，q 個は別の同じもの，r 個はまた別の同じもの，……であるとき，これら n 個のもの全部を 1 列に並べる順列の総数は，次のようになる。

$$_nC_p\times{}_{n-p}C_q\times{}_{n-p-q}C_r\times\cdots\cdots$$

この式は，公式２を用いて，次のように変形される。

公式２　$_nC_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

同じものを含む順列の総数

n 個のもののうち，p 個は同じもの，q 個は別の同じもの，r 個はまた別の同じもの，…… であるとき，これら n 個のもの全部を 1 列に並べる順列の総数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}\qquad\text{ただし}\qquad p+q+r+\cdots\cdots=n$$

４個以上でも同じ

２個のときは $_nC_p=\dfrac{n!}{p!q!}$ である

深める　例９ を次のように考えて求めてみよう。

(1)　a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c の 6 個の文字の順列の総数を求める。

(2)　(1) で a_1，a_2，a_3 の区別をなくし，b_1，b_2 の区別をなくした場合の並べ方の総数を求める。

解答　(1) $6!=6\cdot5!=720$

(2) a_1，a_2，a_3 の区別をなくすと，同じものが 3! 通りずつできる。

同じようにb$_1$，b_2 の区別をなくすと 2! 通りできる。よって $\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}=60$

場合の数と確率【同じものを含む順列など】 p.37～40

青チャートA: 例題 27～30,32～34

問７） 1，1，1，2，2，3，3 の 7 個の数字全部を使ってできる 7 桁の整数は，何個あるか。

解答 同じ数字が 3 個，2 個，2 個あり 合計 7 個，これらを 1 列に並べるから

分子は区別なくして合計の階乗

分母は同じもの個数の階乗

$$\frac{7!}{3!2!2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=210$$

答 210 個

練習３１） monotone という単語の 8 個の文字全部を使ってできる文字列は，何通りあるか。

解答 o が 3 個，n が 2 個，m，t，e がそれぞれ 1 個ずつあるから，求める文字列の総数は

分子は区別なくして合計の階乗

分母は同じもの個数の階乗

$$\frac{8!}{3!2!1!1!1!}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1}=3360$$

答 3360 通り

□おさらい（項が二つでないときの係数の求め方）

例１） $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項の係数を求めよ。

多項定理 $(○+□+△)^n$

～ n 個のカッコから○を取り出すカッコを選んでも、残りは何か決まらない

⇒ 組合せ $_n\mathrm{C}_r$ では係数が決められない

⇒○と□と△を n 個並べる並べ方（同じものを含む順列 $\dfrac{n!}{p!\cdot q!\cdot r!}$ ）で！

二項でも
多項定理を使っても
構わない
（$_n\mathrm{C}_r$ と同じ）

解答 $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項の係数なので

一般項は $\dfrac{7!}{p!q!r!}\cdot a^p\cdot b^q\cdot c^r$ である。

$a^3b^2c^2$ となるのは $p=3$， $q=2$， $r=2$ なので

求める係数は $\dfrac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3!}{3!\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=210$

練習） $(2x-y-5z)^6$ の展開式で，x^2y^3z の係数を求めよ。

一般項は $\dfrac{6!}{p!q!r!}\cdot(2x)^p\cdot(-y)^q\cdot(-5z)^r=\dfrac{6!}{p!q!r!}\cdot2^p\cdot(-1)^q\cdot(-5)^r\cdot x^p\cdot y^q\cdot z^r$

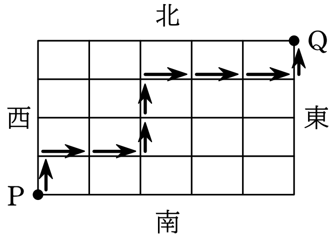
x^2y^3z となるのは $p=2$， $q=3$， $z=1$ のときなので

求める係数は $\dfrac{6!}{2!3!1!}\cdot2^2\cdot(-1)^3\cdot(-5)^1=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3!}{2\cdot1\cdot3!\cdot1}\cdot4\cdot(-1)\cdot(-5)=1200$

□最短経路問題

応用例題６）

右の図のように，ある街には東西に 5 本，南北に 6 本の道がある。P から Q まで最短距離で行く道順は何通りあるか。



解説 例えば図の矢印で示された道順は

↑→→↑↑→→→↑で表される。すなわち，

1 つの道順は 4 個の↑と 5 個の → を使って作られる順列 に対応している。

同じものを含む順列の話

解答 北に 1 区画進むことを↑，

東に 1 区画進むことを → で表すと，

P から Q まで最短距離で行く道順の総数は，4 個の↑と 5 個の → を 1 列に並べる順列の総数に等しい。したがって，求める道順の総数は

$$\frac{9!}{4!5!}=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126$$

答 126 通り

別解「→→→→→→→→→」の中で↑に変える矢印を変えると考えると

$${}_9C_4=\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=126$$

例題） 右の図のような道のある地域で，次のような最短の道順は何通りあるか。

(1) C から B まで行く。

解答 右へ 1 区画進むことを → で，上へ 1 区画進むことを↑で表す。

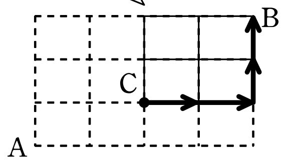
C から B へ行く最短の道順は，→ 2 個と ↑ 2 個の順列で表される。

よって，求める最短の道順の総数は

$$\frac{4!}{2!\,2!}=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6$$

答 6 通り

シンプルな経路で
矢印の本数を決める



(2) A から C を通って B まで行く。

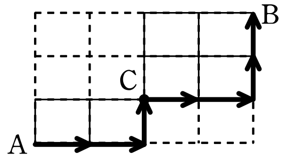
解答 A から C へ行く最短の道順は，→ 2 個と↑ 1 個の順列で表される。

C から B へ行く最短の道順は 6 通りある。

よって，求める最短の道順の総数は

$$\frac{3!}{2!1!}\times 6=3\times 6=18$$

答 18 通り

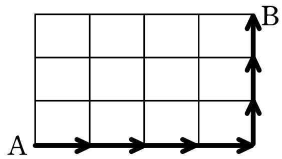


(3) A から C を通らずに B まで行く。

解答 A から B へ行く最短の道順は，→ 4 個と ↑ 3 個の順列で表されるから，その総数は

$$\frac{7!}{4!\,3!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=35$$

（Cを通らない） ＝ （総数） － （Cを通る）



このうち，C を通るものが 18 通りあるから，

求める最短の道順の総数は

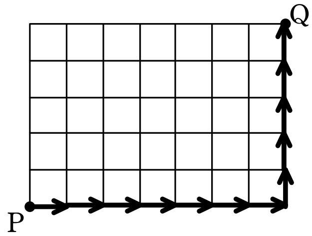
$$35-18=17$$

答 17 通り

場合の数と確率【同じものを含む順列など】 p.37～40

青チャートA: 例題 27～30,32～34

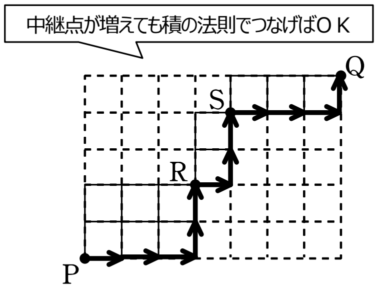
４STEP７３） 右のような街路で，P から Q まで行く最短経路のうち，次の場合は何通りあるか。



(1) 総数

解答　P から Q まで行く最短経路の総数は，7 個の → と 5 個の ↑ を 1 列に並べる順列の総数に等しい。

よって $\dfrac{12!}{7!5!}=792$ (通り)



(3) R，S をともに通る経路

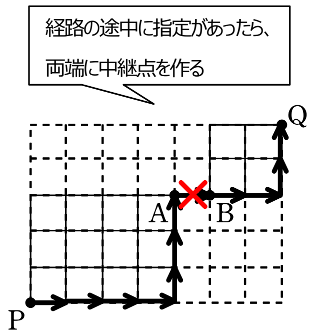
解答　P から R まで行く最短経路は $\dfrac{5!}{3!2!}$ 通り

R から S まで行く最短経路は $\dfrac{3!}{2!}$ 通り

S から Q まで行く最短経路は $\dfrac{4!}{3!}$ 通り

よって，R，S をともに通る最短経路は

$$\frac{5!}{3!2!}\times\frac{3!}{2!}\times\frac{4!}{3!}=120 \text{ (通り)}$$



(3) ×印の箇所を通らない経路

解答　×印がある区画の左端を A，右端を B とする。

P から A まで行く最短経路は $\dfrac{7!}{4!3!}$ 通り

A から B まで行く最短経路は 1 通り

B から Q まで行く最短経路は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り

よって，×印の箇所を通る最短経路は

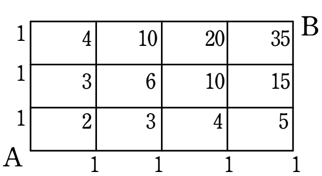
$$\frac{7!}{4!3!}\times1\times\frac{4!}{2!2!}=210 \text{ (通り)}$$

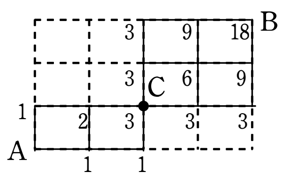
したがって×印の箇所を通らない経路は $792-210=582$ (通り)

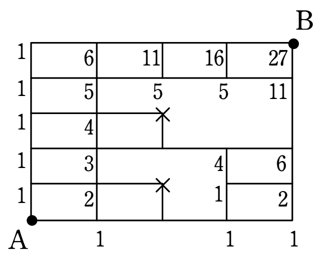
【裏技！？】 最短経路を出すときに、経路の足し算で求めることができる。

この方法しかできないでは困るが、知っていれば検算などで使える。

デメリット … 一ヶ所でも間違えると計算が合わない。記述だと微妙かも。中間点は付かない。







【ルール】スタート地点から順に交差点までの道順の数を書き込んでいく。道が交差するところは、その前の交差点の数値の和となる。

場合の数と確率【同じものを含む順列など】 p.37～40 青チャートA: 例題 27～30,32～34

□重複を許して取る組合せ

組合せ ${}_nC_r$ では，異なる n 個のものから，異なる r 個を取り出した。

ここでは，同じものを繰り返し取ってもよいとして，r 個取る組合せの総数について考えてみよう。

3 種類の文字 a，b，c から，重複を許して 4 個取って作る組合せの総数を求める。a，b，c の個数の決め方は，次のように考えればよい。

4 個の玉が入った箱の中に 2 枚の板を入れて，a，b，c の 3 つに区切る。区切りの中にある玉の個数だけその文字を選ぶと考えると，玉の分け方の総数と，a，b，c の個数の決め方の総数が一致する。

a ○○○ | b ○ | c → a 3 個，b 1 個，c 0 個

a ○○ | b ○ | c ○ → a 2 個，b 1 個，c 1 個

a | b ○○○○ | c → a 0 個，b 4 個，c 0 個

箱の中の区切りを｜で表し，玉を ○ で表すと，玉の分け方の総数は，2 個の｜と 4 個の ○ を並べる順列の総数に等しい。すなわち，｜と○を合わせた 6 個の場所から ○ を置く 4 個の場所を選ぶ方法の総数に等しい。

したがって，求める組合せの総数は

$$\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}=15 \text{（通り）}$$

> $\{(n-1)+r\}$ 個の場所から r 個の場所を選ぶ方法の総数に等しい
>
> $n+r-1$ 個の | から r 個選んで○に変えると考える
> 例）| | | | | | → ○○○ | ○ |
>
> ので，重複を許す場合の組合せの総数は，
>
> $${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r=\frac{(n+r-1)(n+r-2)\cdots\cdots(n+1)n}{r(r-1)\cdots\cdots2\cdot1}$$
>
> を用いる解き方もある。 homogeneous（同次，斉次(せいじ)）

一般に，異なる n 個のものから重複を許して r 個取って作る組合せの総数は，$(n-1)$ 個の｜と r 個の ○ を並べる順列の総数に等しい。すなわち $\dfrac{(n-1+r)!}{(n-1)!r!}$ である。

例） 3 種類の果物から重複を許して 5 個取って作る組合せの総数は

ミカン ○ | リンゴ ○○○ | バナナ ○

$$\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\cdot6\cdot5!}{2\cdot1\cdot5!}=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21 \text{（通り）}$$ 終

例） 袋の中に赤玉，青玉，白玉，黒玉がたくさん入っている。この袋から 7 個の玉を取り出すとき，玉の取り出し方は何通りあるか。

赤 ○ | 青 ○○○ | 白 ○○ | 黒 ○

色がない 7 個の玉と 3 つの仕切りの順列を作り，

仕切りで分けられた 4 か所の玉を，左から順に　赤，青，白，黒で塗ると考える。

よって，玉の取り出し方の総数は，7 個の同じものと 3 個の同じものの順列の総数に等しいから

$$\frac{10!}{7!3!}=\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7!}{7!\cdot3\cdot2\cdot1}=120 \text{（通り）}$$

場合の数と確率【同じものを含む順列など】 p.37～40

青チャートA: 例題 27～30,32～34

例２＋α）

(1) $x+y+z=8$ を満たす**負でない整数解**の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか。

負でない整数 ⇒ ０と正の整数
⇒ ０でもＯＫなのでそのまま重複組合せ

解答 求める整数解の組の個数は，

｜2 個と○ 8 個を 1 列に並べる順列の総数と同じで

$$\frac{10!}{2!8!}=\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}=45\ (個)$$

x y z
○ ○○○｜○○｜○○

(2) $x+y+z=6$ を満たす**正の整数**解の組 $(x,\ y,\ z)$ は何個あるか。

正の整数 ⇒ ０はだめ
⇒ 先にそれぞれに振り分けてから、重複組合せ

解答 正の整数なので $x\geqq 1$，$y\geqq 1$，$z\geqq 1$ である

x y z
○○○｜○○｜○ ⇒ ⓧⓨⓩ ○｜○○｜

先に振り分ける

残りを重複組合せで計算

よって，｜2 個と○ 3 個を 1 列に並べる順列の総数と同じで $\dfrac{5!}{2!3!}=10$ (個)

4STEP数学Ａ 例題16改） 柿，りんご，みかんの 3 種類の果物の中から 10 個の果物を買う。次のような買い方は何通りあるか。【青チャート練習３３類題】

(1) 買わない果物があってもよい場合。

(2) どの果物も少なくとも 1 個は買う場合。

(3) 柿は 3 個買い，りんご，みかん は少なくとも 1 個買うとき。

解答 (1) 柿，りんご，みかんの 3 種類から重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$$\frac{12!}{10!2!}=\frac{12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 2\cdot 1}=66\ (通り)$$

柿 りんご みかん
○○○ ○｜○○｜○○○○

別解 3 種類の果物から重複を許して 10 個取る組合せの総数であるから

$$_{3+10-1}C_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=66\ (通り)$$

(2) 先に柿，りんご，みかんを 1 個ずつ買ってしまって，残りを計算する

柿りみ

柿 りんご みかん
○○｜○ ○○｜○○

よって $\dfrac{9!}{7!2!}=\dfrac{9\cdot 8\cdot 7!}{7!\cdot 2\cdot 1}=36$ (通り)

別解 まず，3 種類の果物を 1 個ずつ購入する。残りは 3 種類の果物から重複を許して 7 個取る組合せの総数であるから $_{3+7-1}C_7={}_9C_7={}_9C_2=\dfrac{9\cdot 8}{2\cdot 1}=36$ (通り)

(3) 先に柿を３個，りんご，みかんに 1 個振り分けてしまって，残りをりんご，みかんで分ける

柿柿柿りみ

りんご みかん
○○○｜○○

よって $\dfrac{6!}{5!1!}=\dfrac{6\cdot 5!}{5!\cdot 1}=6$ (通り)