場合の数と確率【事象と確率】　p.42～47

青チャートA：例題 35～41

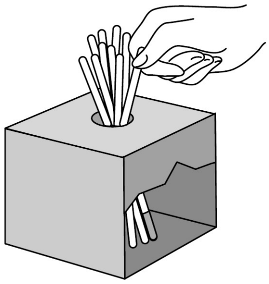
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率に関わる用語を理解し，順列・組合せの考え方を用いて確率を求めよう

私たちの身の回りには偶然に左右されて起こる事柄が多くある。このような事柄について，それがどの程度起こりやすいのか，または起こりにくいのかを数学的に考える。

□確率の意味

当たりくじ 1 本を含む 10 本のくじがある。この中から 1 本のくじを引くとき，それが当たりくじであるかどうかを，前もって確実に知ることはできない。



しかし，10 本のくじのうちのどのくじを引くことも，同じ程度に期待されるから，当たりくじを引く割合は $\dfrac{1}{10}$ であると考えられる。

数学的確率：事象の確率を理論的な枠組みや数学的な法則に基づいて計算

実際，1 本のくじを引いて，それが当たりくじかどうかを記録してからもとに戻し，よく混ぜた後，またくじを引くことを繰り返し行うとする。このとき，くじを引く回数が大きくなっていくと，当たりくじを引く割合

$$\frac{\text{当たりくじを引く回数}}{\text{くじを引く回数}}$$

は，上で考えた値 $\dfrac{1}{10}$ に近づいていく。

統計的確率：実際のデータから確率を推定
回数が多くなるにつれ，比較的安定した値になる。これは，偶然事象のもつ統計的規則性と呼ばれ，確率をもつと考えることの正当性を与えている（大数の法則などは数学Ｂで）。

このように，ある事柄が起こることが期待される程度を表す数値を **確 率** という。結果が偶然に左右され，前もって確実に結果を知ることができないときでも，ある事柄が起こる確率を計算できる場合がある。

□試行と事象

「さいころを投げる」とか「くじを引く」などのように，同じ条件のもとで繰り返すことができる実験や観測を **試 行** という。また，試行の結果として起こる事柄を **事 象** という。事象は A，B，C などの文字を用いて表す。1 個のさいころを投げる試行では，

たとえば 1 の目が出ることを，単に 1 で表すと，

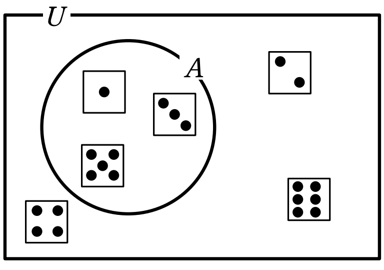
試行の結果全体は，次の集合 U で表すことができる。

$U=\{1，2，3，4，5，6\}$

このとき，「奇数の目が出る」という事象 A は，

$A=\{1，3，5\}$

のように，U の部分集合で表すことができる。



一般に，ある試行において，起こりうる場合全体の集合を全体集合 U とするとき，この試行におけるどの事象も，U の部分集合で表すことができる。特に，全体集合 U で表される事象を **全事象**，空集合 $\varnothing$ で表される事象を **空事象** という。全事象は必ず起こる事象であり，空事象は決して起こら

ない事象である。

事　象 ⇔ 部分集合
全事象 ⇔ 全体集合
空事象 ⇔ 空 集 合

また，U の 1 個の要素からなる集合で表される事象を **根元事象** という。上の例における根元事象は，次の 6 個である。

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\},\ \{5\},\ \{6\}$$

【注意】 今後，事象 A を表す U の部分集合と事象 A を区別せず，U の部分集合のことも事象という。

例１１） 3 個の白玉に 1，2，3 と番号をつけ，それぞれの白玉 1 個を取り出すことを a_1，a_2，a_3 とする。同様に，それぞれの赤玉 1 個を取り出すことを b_1，b_2 とする。

この試行における全事象を U とすると $U=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2\}$

また，根元事象は 5 個あり，それらは次の集合で表される。

$$\{a_1\},\ \{a_2\},\ \{a_3\},\ \{b_1\},\ \{b_2\}$$ 終

記号化するとともに
区別化をしている

例１１のように，いくつかのものの中から選ぶ場合に，この例の 3 個の白玉のように区別できないものの場合も，番号などを用いて，白玉 1 を取り出す事象と白玉 2 を取り出す事象を別の根元事象と考える。

例１２） 2 枚の硬貨 a，b を同時に投げる試行において，例えば硬貨 a は表，硬貨 b は裏が出ることを (表，裏) のように書くとする。この試行における全事象を U とすると

$U=\{$(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)$\}$

また，根元事象は 4 個あり，それらは次の集合で表される。

$\{$(表，表)$\}$，$\{$(表，裏)$\}$，$\{$(裏，表)$\}$，$\{$(裏，裏)$\}$ 終

10円 ＼ 100円	表	裏
表	(表，表)	(表，裏)
裏	(裏，表)	(裏，裏)

○事象と確率～同様に確からしいときの確率

1 つの試行において，ある事象 A の起こることが期待される割合を，**事象 A の確率** といい，これを $P(A)$ で表す

$P(A)$ の P は，「確率」を意味する英語 probability プロバビラティの頭文字である。

また，1 つの試行において，根元事象のどれが起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は **同様に確からしい** という。

簡単にいうと，
「起こりうるすべての結果のどれが起こる可能性も，すべて同じ」ということ
（equally possible
「同じくらいあり得る」）

全事象 U の要素の個数を $n(U)$ とし，事象 A の要素の個数を $n(A)$ とする。全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき，事象 A の確率 $P(A)$ を，次の式で定める。

各根元事象が同様に確からしいときの事象 A の確率

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

つまり $P(A)=\dfrac{\textbf{部分}}{\textbf{全体}}$

この確率の定義は最も基本的（古典的）なもので ラプラスの定義と呼ばれている

以下，ある試行において，各根元事象が同様に確からしいときについて，1 つの事象が起こる確率を考える。

場合の数と確率【事象と確率】 p.42～47

青チャートA: 例題 35～41

練習３５） 2 枚の硬貨を同時に投げるとき，表と裏が 1 枚ずつ出る確率を求めよ。

解答　全事象を U，表と裏が 1 枚ずつ出るという事象を A とすると

$U=\{$(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)$\}$

$A=\{$(表，裏)，(裏，表)$\}$

であるから　$n(U)=4$，$n(A)=2$

よって　$P(A)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

見た目が同じでも区別して考える
→　根元事象としては異なるものであり
それぞれの根元事象が起こることは
同じ程度に期待できる
→　**「同様に確からしい」**

例題） 1 個のさいころを投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　奇数の目が出る。　　　(2)　3 以上の目が出る。

解答　起こりうるすべての目の出方は，6 通りある。　これが全体

(1)　奇数の目が出るのは，3 通りある。 よって，奇数の目が出る確率は　$\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2)　3 以上の目が出るのは，4 通りある。 よって，3 以上の目が出る確率は　$\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

例題１０改） 2 個のさいころを同時に投げるとき，次の場合の確率を求めよ。

(1)　同じ目が出る。　　　(2)　目の和が 5 になる。

(3)　目の和が 7 になる。　　(4)　2 個とも偶数の目が出る。

2 個のさいころと言えば「表」

和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

解答　2 個のさいころの目の出方は，6×6 の 36 通り。　これが全体

(1)　同じ目が出るのは，以下の6 通り。

(1，1)，(2，2)，(3，3)，(4，4)，(5，5)，(6，6)

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(2)　目の和が 5 になるのは，以下の 4 通り。

(1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1)

よって，求める確率は　$\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

(3)　目の和が 7 になるのは，以下の 6 通り。

(1，6)，(2，5)，(3，4)，(4，3)，(5，2)，(6，1)　よって，求める確率は　$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(4)　2 個とも偶数の目が出るのは　$3\times3=9$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

練習３６） 2 個のさいころを同時に投げる試行において，出る目の和がいくつになる事象の確率が最も大きいか。また，その確率を求めよ。

解答　上の表より出る目の和が 7 になる事象の確率が最も大きい。

また，その確率は　$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

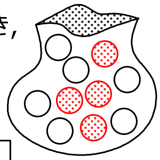
この問題はカルダノ(1501～1576)が著書の中で賭け事について紹介されたもの

場合の数と確率【事象と確率】 p.42～47

青チャートA: 例題 35～41

方針 まずは**区別を無くして**(区別関係なく)**全体(分母)**を考える 次に**条件をバラバラに吟味して積の法則でまとめて分子にする**	確率は1より大きくなってはいけない (計算ミスの可能性大)

例題１１） 白玉 6 個，赤玉 4 個が入っている袋から，玉を同時に 3 個取り出すとき，
白玉 1 個と赤玉 2 個が出る確率を求めよ。



解答 **全体：**起こりうる場合は，10 個の玉から 3 個を取る組合せであるから，
全部で ${}_{10}C_3$ 通りあり，どの場合も同様に確からしい。

赤，白 関係なく 10 個から 3 個選ぶ

このうち，白玉 1 個と赤玉 2 個が出る場合は，6 個の白玉から 1 個，
4 個の赤玉から 2 個取り出す場合であるから，全部で
${}_6C_1 \times {}_4C_2$ 通りある。

よって，求める確率は $\dfrac{{}_6C_1 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = \dfrac{3}{10}$

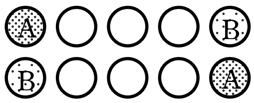
【分母は逆数にして処理】

$$\frac{{}_6C_1 \times {}_4C_2}{{}_{10}C_3} = {}_6C_1 \times {}_4C_2 \times \frac{1}{{}_{10}C_3} = 6 \times \frac{4\cdot3}{2\cdot1} \times \frac{3\cdot2\cdot1}{10\cdot9\cdot8} = \frac{3}{10}$$

【繁分数式を避けるため、式を整理し約分しやすくしておく】

${}_6C_1 \times {}_4C_2 = 6 \times \dfrac{4\cdot3}{2\cdot1} = 6\cdot2\cdot3$，${}_{10}C_3 = \dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 10\cdot3\cdot4$ より $\dfrac{6\cdot2\cdot3}{10\cdot3\cdot4} = \dfrac{3}{10}$

応用例題７） A，B，C，D，E の 5 人が，くじ引きで順番を決めて
1 列に並ぶとき，両端が A と B である確率を求めよ。



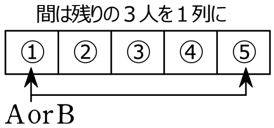
解答 **全体：**5 人が 1 列に並ぶ方法は，全部で 5! 通りあり，
どの場合も同様に確からしい。

A，B 関係なく 5 人を一列に並べる

このうち，両端が A と B である場合は，左端が A の場合，Bの場合の 2 通りあり，
そのおのおのに対して，C，D，E の 3 人がその間に並ぶ方法が 3! 通りある。
よって，両端が A と B である場合は，$2 \times 3!$ 通りある。

ゆえに，求める確率は $\dfrac{2\times3!}{5!} = \dfrac{2\times3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \dfrac{1}{10}$

間は残りの 3 人を 1 列に



例題） 4 人がじゃんけんを 1 回するとき，次の確率を求めよ。

(1) 2 人が勝つ確率　　(2) あいこになる確率

解答 4 人の手の出し方の総数は 3^4 通り

(1) 2 人が勝つ場合，勝者の決まり方は ${}_4C_2$ 通り

誰が勝つか

そのおのおのに対して，勝ち方がグー，チョキ，パーの 3 通りある。

何で勝つか

よって，求める確率は $\dfrac{{}_4C_2\times3}{3^4} = \dfrac{6\times3}{3^4} = \dfrac{2}{9}$

(2) あいこになるのは，次の [1]，[2] のどちらかの場合である。

[1] 4 人とも同じ手を出す場合　3 通り

[2] 出る手が 3 種類の場合

手の組合せは {<u>グー，グー</u>，チョキ，パー}，{グー，<u>チョキ，チョキ</u>，パー}，{グー，チョキ，<u>パー，パー</u>}
の 3 つの場合がある。出す人を区別すると，どの場合も $\dfrac{4!}{2!} = 12$（通り）ずつあるから　$12\times3=36$（通り）

[1]，[2] から，あいこになる確率は $\dfrac{3+36}{3^4} = \dfrac{13}{27}$

場合の数と確率【事象と確率】 p.42～47

青チャートA: 例題 35～41

4STEP数学Ａ 問題１３５） 1 つのつぼに赤玉と白玉が合計 10 個入っている。このつぼから 1 個の玉を取り出し，それをつぼに戻さずにまた 1 個の玉を取り出す。このとき，取り出される 2 個の玉がともに赤玉である確率は $\frac{7}{15}$ であるという。このつぼに初め赤玉は何個入っているか。

【青チャート数学Ａ基本例題４０類題】

解答 赤玉の個数を x とすると，条件から $2 \leqq x \leqq 9$

0≦x≦10 でもよいが条件より赤のみ，白のみはないので絞り込みをしている

また $\underbrace{\frac{x}{10}}_{1回目} \cdot \underbrace{\frac{x-1}{9}}_{2回目} = \frac{7}{15}$

整理して $x^2 - x - 42 = 0$ すなわち $(x+6)(x-7) = 0$

$2 \leqq x \leqq 9$ であるから $x = 7$

よって 7 個

別解 玉を同時に 2 個取り出すと考えて $\frac{{}_x C_2}{{}_{10} C_2} = \frac{7}{15}$ から $\frac{x(x-1)}{10 \cdot 9} = \frac{7}{15}$ としてもよい (以下，本解と同じ) 。

青チャート数学Ａ 例題４１）

3，4，5，6，7，8 から 3 つの異なる数を取り出し，取り出した順に a，b，c とする。
このとき，a，b，c を係数とする 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ が実数解をもつ確率を求めよ。

解答 できる 2 次方程式の総数は ${}_6 P_3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ (通り)

6 個の数字から 3 個選んで順番に a, b, c に当てはめる

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D とすると，実数解をもつための条件は

$D \geqq 0$

$D = b^2 - 4ac$ であるから $b^2 - 4ac \geqq 0$ …… ①

b について，範囲から絞り込みをかける

$3 \leqq a \leqq 8$，$3 \leqq b \leqq 8$，$3 \leqq c \leqq 8$ であり，$a \fallingdotseq c$ であるから

① より $b^2 \geqq 4ac \geqq 4 \cdot 3 \cdot 4$ ゆえに $b^2 \geqq 48$ よって $b = 7$，8

$b = 7$ のとき，① から $7^2 \geqq 4ac$ すなわち $ac \leqq \frac{49}{4} = 12.25$

b の値を固定してそれぞれで a，c を考える

この不等式を満たす a，c の組は $(a, c) = (3, 4), (4, 3)$

$b = 8$ のとき，① から $8^2 \geqq 4ac$ すなわち $ac \leqq 16$

この不等式を満たす a，c の組は $(a, c) = (3, 4), (3, 5), (4, 3), (5, 3)$

したがって，求める確率は $\frac{2+4}{120} = \frac{1}{20}$