場合の数と確率【基本性質】 p.48～54

青チャートA: 例題 42～46

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】確率に関わる用語や基本的な約束事を理解しよう

□確率の基本性質

確率の基本性質を調べる前に，事象 A，B に対して，次のような事象を定義しておく。

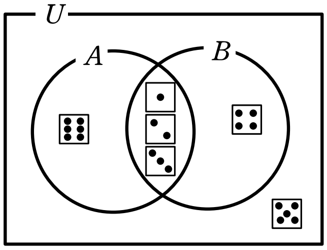
用語	意味	記号	集合では
全事象	起こりうる結果すべて	U	全体集合
A，B の**積事象**	A と B がともに起きる確率	$A\cap B$	共通部分
A，B の**和事象**	A または B が起こる確率	$A\cup B$	和集合
空事象	Aが起こらない事象	$\varnothing$	空集合
排反事象	A，Bが互いに排反であること	$A\cap B=\varnothing$	共通部分が$\varnothing$
余事象	「A が起こらない」という事象	$\overline{A}$	補集合

問９） 1 個のさいころを投げる試行において，事象 A，B を

A：6 の約数の目が出る，　B：4 以下の目が出る

とする。事象 $A\cap B$，$A\cup B$ を集合と考え，それぞれの集合を，要素を書き並べて表せ。

また，確率 $P(A\cap B)$，$P(A\cup B)$ を求めよ。



解答　全事象を U とすると　$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

また，$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，$B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ である。

$A\cap B$ は，6 の約数かつ 4 以下の目が出る事象であるから

$A\cap B=\{1,\ 2,\ 3\}$

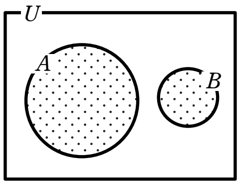
$A\cup B$ は，6 の約数または 4 以下の目が出る事象であるから

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6\}$

よって　$P(A\cap B)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，　$P(A\cup B)=\dfrac{5}{6}$

> 「同時に起こる」「引き続いて～が起こる」「一緒に出る」「ともに起こる」などは積事象の話（共通部分のときは「どちらも」なども）
> 「少なくとも一方は」などは和事象の話

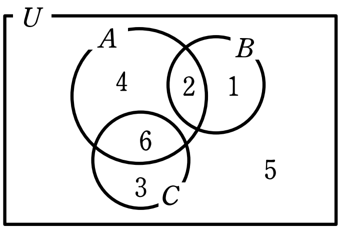
□排反事象



2 つの事象 A，B が同時には決して起こらないとき，すなわち，$A\cap B=\varnothing$ のとき，2 つの事象 A，B は互いに **排 反** である，または，互いに **排反事象** であるという。

例題） 1 個のさいころを投げるとき，「偶数の目が出る」という事象を A，「2 以下の目が出る」という事象を B，「3 の倍数の目が出る」という事象を C とする。

どの事象とどの事象が互いに排反であるか。



解答　$A=\{2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{1,\ 2\}$，$C=\{3,\ 6\}$ であり

$A\cap B=\{2\}$，$B\cap C=\varnothing$，$C\cap A=\{6\}$

よって，B と C が互いに排反である。

場合の数と確率【基本性質】 p.48～54

青チャートA: 例題 42～46

□確率の基本性質

各根元事象が同様に確からしい試行において，その全事象を U とする。全事象 U と事象 A について，

$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$ の関係が成り立つ。

この式の各辺を $n(U)$ で割ると $0 \leqq \dfrac{n(A)}{n(U)} \leqq \dfrac{n(U)}{n(U)}$

$\dfrac{n(A)}{n(U)} = P(A)$ であるから $0 \leqq P(A) \leqq 1$

確率のとる値の最大値，最小値

ここで，$P(A)=0$ となるのは，$A=\varnothing$ のときであり，$P(A)=1$ となるのは $A=U$ のときである。

2 つの事象 A，B が互いに排反であるとき，すなわち $A \cap B=\varnothing$ のとき，次の等式が成り立つ。

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)$$

この等式の両辺を $n(U)$ で割ると

$$\frac{n(A \cup B)}{n(U)}=\frac{n(A)}{n(U)}+\frac{n(B)}{n(U)}$$

すなわち $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

$A \cap B=\varnothing$ のとき
$n(A \cup B)=n(A)+n(B)$
$\Leftrightarrow$ $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

以上のことをまとめると，次のようになる。

1 どのような事象 A についても $0 \leqq P(A) \leqq 1$

確率は０～１の間（０%～１００%）

とくに，空事象 $\varnothing$ について $P(\varnothing)=0$

何も起きないときは０%

全事象 U について $P(U)=1$

全てが起きるなら１００%

2 事象 A，B が互いに排反であるとき

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

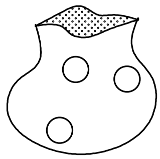
事象が重複してないなら、確率は足し算

２を，**確率の 加法定理** という。３ つ以上の排反な事象についても，２つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ。

３つのときは $A \cap B \cap C=\varnothing$ ではなく
$A \cap B=\varnothing, B \cap C=\varnothing, C \cap A=\varnothing$

例題） 赤玉 2 個，白玉 3 個，青玉 4 個の入った袋から，

3 個の玉を同時に取り出すとき，3 個とも同じ色である確率を求めよ。



解答 「3 個とも同じ色である」という事象は，

「3 個とも白玉である」という事象 A，「3 個とも青玉である」という事象 B

の和事象 $A \cup B$ である。

赤は２個しかないので「３個とも赤玉」は起こらない

全部：9 個から 3 個選ぶ ${}_9\mathrm{C}_3=\dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}=3 \cdot 4 \cdot 7$

「3 個とも白玉である」: 3 個から 3 個選ぶ ${}_3\mathrm{C}_3=1$ なので $P(A)=\dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 7}=\dfrac{1}{84}$

「3 個とも青玉である」: 4 個から 3 個選ぶ ${}_4\mathrm{C}_3=4$ なので $P(B)=\dfrac{4}{3 \cdot 4 \cdot 7}=\dfrac{4}{84}$

約分をする際は
通分も意識して

A，B は互いに排反であるから，加法定理により，求める確率は

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{84}+\frac{4}{84}=\frac{5}{84}$$

互いに排反 ⇒
確率の加法定理
（足すだけでＯＫ）

別解 場合の数で考えて「3 個とも同じ色である」のは $1+4=5$ （通り）

よって求める確率は $\dfrac{5}{3 \cdot 4 \cdot 7}=\dfrac{5}{84}$

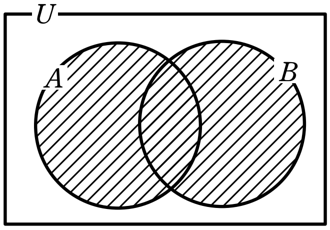
場合の数で考えても計算可能

場合の数と確率【基本性質】 p.48～54

青チャートA：例題 42～46

□一般の和事象の確率

全事象を U とする。2 つの事象 A，B が**互いに排反でないとき**，和事象の確率 $P(A\cup B)$ を考えてみよう。



等式 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$ が成り立つ。

よって，両辺を $n(U)$ で割ると，次の等式が得られる。

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

この等式を利用して，確率を求めてみよう。

例題１３） 1 から 100 までの番号をつけた 100 枚のカードから 1 枚を取り出すとき，その番号が 4 の倍数または 6 の倍数である確率を求めよ。

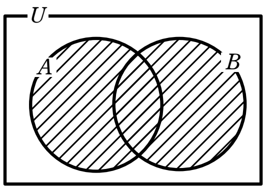
解答 全体： 100 枚の番号札から 1 枚引くので 100 通り

取り出したカードの番号が 4 の倍数であるという事象を A， 6 の倍数であるという事象を B とすると，取り出したカードの番号が 4 の倍数または 6 の倍数であるという事象は $A\cup B$ である。ここで

$$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ 4\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$$

$$B=\{6\cdot1,\ 6\cdot2,\ 6\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 6\cdot16\}$$

$$A\cap B=\{12\cdot1,\ 12\cdot2,\ 12\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 12\cdot8\}$$



であるから

$$n(A)=25,\ n(B)=16,\ n(A\cap B)=8$$

また，全事象を U とすると

$$n(U)=100$$

よって

$$P(A)=\frac{25}{100},\ P(B)=\frac{16}{100},\ P(A\cap B)=\frac{8}{100}$$

求める確率は

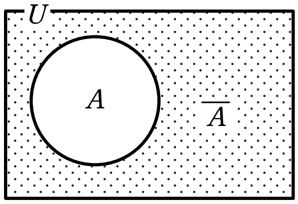
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{25}{100}+\frac{16}{100}-\frac{8}{100}=\frac{33}{100}$$

場合の数と確率【基本性質】 p.48～54

青チャートA: 例題42～46

□余事象とその確率



全事象を U とする。事象 A に対して，A が起こらないという事象を，A の 余事象 といい，$\overline{A}$ で表す。

余事象 $\overline{A}$ は，U の部分集合 A の補集合 $\overline{A}$ で表される。

事象 A とその余事象 $\overline{A}$ について，$A\cap\overline{A}=\varnothing$ であるから，A と $\overline{A}$ は互いに排反である。よって，確率の加法定理により $P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

一方，$A\cup\overline{A}=U$ であるから $P(A\cup\overline{A})=P(U)=1$ ゆえに $P(A)+P(\overline{A})=1$

したがって，余事象 $\overline{A}$ の確率について，次の公式が得られる。

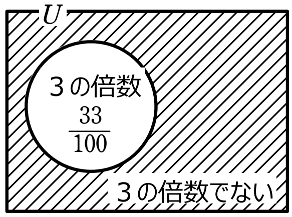
> **余事象と確率**
>
> $P(A)+P(\overline{A})=1$ すなわち $P(\overline{A})=1-P(A)$

例題） 1 から 200 までの 200 枚の番号札から 1 枚引くとき，
3 の倍数**でない**番号を引く確率を求めよ。

否定の表現や「少なくとも～」は
余事象や補集合の合図

反対側を考えて、
全体から引いて求める

解答 引いた札の番号が「 3 の倍数でない」という事象は，
「 3 の倍数である」という事象の余事象である。



1 から 200 までの番号のうち，3 の倍数は

$\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot66\}$

よって， 3 の倍数の番号を引く確率は $\dfrac{66}{200}=\dfrac{33}{100}$

したがって，求める確率は $1-\dfrac{66}{200}=1-\dfrac{33}{100}=\dfrac{67}{100}$ 終

全体が全事象なら 1 から引く 部分的なときは注意しよう

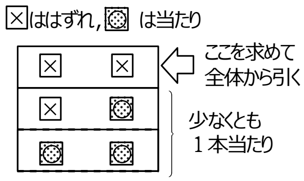
例題１４） 15 本のくじの中に当たりくじが 5 本ある。
この中から 2 本のくじを同時に引くとき，**少なくとも 1 本が**当たる確率を求めよ。

否定の表現や「少なくとも～」は
余事象や補集合の合図

反対側を考えて、
全体から引いて求める

解答 全体は ${}_{15}\mathrm{C}_2$ 通り

「 2 本のうち少なくとも 1 本が当たる」という事象は，
「 2 本ともはずれる」という事象の余事象である。



2 本ともはずれる確率は $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_2}{{}_{15}\mathrm{C}_2}=\dfrac{10\cdot9}{2\cdot1}\cdot\dfrac{2\cdot1}{15\cdot14}=\dfrac{3}{7}$

ゆえに，求める確率は $1-\dfrac{3}{7}=\dfrac{4}{7}$

場合の数と確率【基本性質】　p.48～54

青チャートA: 例題 42～46

4STEP数学Ａ　問題１０３） ある試行における 2 つの事象 A，B について，

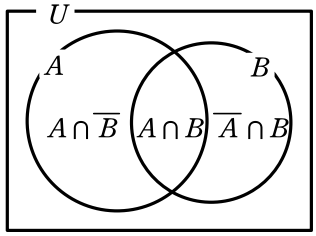
$$P(A)=0.5,\ P(B)=0.3,\ P(A\cup B)=0.6$$

であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$P(A\cap B)$，$P(A\cap\overline{B})$，$P(\overline{A}\cap B)$ を求めよ。

(2)　A，B のどちらか一方だけが起こる事象を，A，B，$\cup$，$\cap$，$\overline{}$ を用いて表せ。

また，その事象が起こる確率を求めよ。【青チャート数学Ａ重要例題４６類題】



解答　(1)　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ から

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$
$$=0.5+0.3-0.6=0.2$$

また　$P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(A\cap B)$

$$=0.5-0.2=0.3$$

$$P(\overline{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$$
$$=0.3-0.2=0.1$$

カルノー図で表すと　0.6

	B ○	$\overline{B}$ ×	合計
A ○	0.2	0.3	0.5
$\overline{A}$ ×	0.1	0.4	0.5
合計	0.3	0.7	1

(2) は○×の所の和

(2)　A，B のどちらか一方だけが起こる事象は $(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

$(A\cap\overline{B})\cap(\overline{A}\cap B)=\varnothing$ であるから，

この事象の起こる確率は

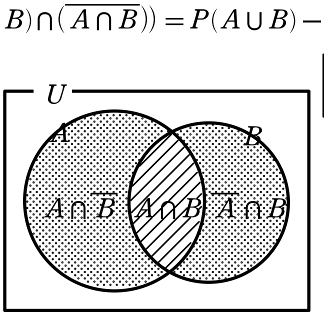
$$P((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B))=P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$$
$$=0.3+0.1=0.4$$

別解　(2)　A，B のどちらか一方だけが起こる事象は　$(A\cup B)\cap(\overline{A\cap B})$

$(A\cup B)\supset(A\cap B)$ であるから，この事象の起こる確率は

$$P((A\cup B)\cap(\overline{A\cap B}))=P(A\cup B)-P(A\cap B)=0.6-0.2=0.4$$

全体ー部分



場合の数と確率【基本性質】　p.48～54

青チャートA: 例題 42～46

○正誤を問う確率の問題

下の問題について隣近所の人と正しいかどうか相談しよう

問題　Ａ君は次のように考えた。Ａ君の考えは正しいかどうかをいえ。
もし，正しくないならば，誤りの原因をなるべく簡潔に指摘せよ。
「さいころを何回か投げるとき，各回に１の目が出る確率は $\frac{1}{6}$ である。
よって，６回投げるとき，少なくとも１回は１の目が出る確率は
$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$ である。」

解答　Ａ君の考えは正しくない。誤りの原因は各回に１の目が出るという事象が互いに排反ではないのに，各回で１の目が出る確率を加えるだけで求める確率にしてしまったところである。

確率の足し算（加法定理）が成り立つには「１回目に１が出る」，「２回目に１が出る」，……，の各事象がは互いに排反でなければいけない。しかし実際には「１回目に１が出て，２回目にも１が出る」こともある（共通部分が存在する）。
そのため本来は２重、３重にもなっている共通部分を引かなくてはいけない。
このような場合は余事象を考えることが多い。