場合の数と確率【独立な試行の確率】p.56～60

青チャートA: 例題 47～48

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】独立な試行のときの確率の求め方をマスターしよう

□独立な試行の確率

片方が１の目が出ても、もう片方が １が出にくくなるようなことはない

Ａ，Ｂの２人がさいころを投げるとする。このとき，Ａがさいころを投げる試行と，Ｂがさいころを投げる試行では，それぞれの結果は互いに影響を与えない。このように，いくつかの試行において，どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき，これらの試行は **独　立** であるという。

例 １５）１個のさいころを投げる試行をS，１枚の硬貨を投げる試行をＴとすると，試行Ｓと試行Ｔは独立である。２つの試行Ｓ，Ｔの全事象を，それぞれ U_1，U_2 とすると

$$U_1=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\},\quad U_2=\{表,\ 裏\}$$

U_2 ＼ U_1	1	2	3	4	5	6
表						
裏						

２つの試行Ｓ，Ｔを行うとき，起こりうるすべての場合の数は $n(U_1)\times n(U_2)$，すなわち 6×2 通りあり，それらは同様に確からしい。

試行Ｓにおいて奇数の目が出るという事象を A，試行Ｔにおいて表が出るという事象を B とし，試行Ｓでは事象 A が起こり，試行Ｔでは事象 B が起こるという事象を C とすると，C の起こる場合の数は $n(A)\times n(B)$，すなわち 3×1 通りある。

したがって　$P(C)=\dfrac{n(A)\times n(B)}{n(U_1)\times n(U_2)}=\dfrac{3\times1}{6\times2}=\dfrac{1}{4}$

例１５における $P(C)$ の計算は，次のようにも書ける。

$$P(C)=\frac{n(A)\times n(B)}{n(U_1)\times n(U_2)}=\frac{n(A)}{n(U_1)}\times\frac{n(B)}{n(U_2)}=\frac{3}{6}\times\frac{1}{2}$$

この確率 $P(C)$ は，次のような２つの確率の積になっているといえる。
Ａで１個のさいころを投げるときに，奇数の目が出る確率 $\frac{3}{6}$
Ｂが１枚の硬貨を投げるときに，表が出る確率 $\frac{1}{2}$

ここで，$\dfrac{n(A)}{n(U_1)}=P(A)$，$\dfrac{n(B)}{n(U_2)}=P(B)$ であるから

$$P(C)=P(A)P(B)$$

補足　集合の直積の考え方を用いると $\dfrac{n(C)}{n(U)}=\dfrac{n(A\times B)}{n(U_1\times U_2)}=\dfrac{n(A)\times n(B)}{n(U_1)\times n(U_2)}$ と説明できる。

一般に，独立な２つの試行における事象の確率について，次のことが成り立つ。

独立な試行の確率

２つの試行ＳとＴが**独立であるとき**，Ｓで事象 A が起こり，かつＴで事象 B が起こるという事象を C とすると，事象 C の確率は $P(A)$ と $P(B)$ の**積に等しい**。

すなわち　　$P(C)=P(A)\times P(B)$

独立な３つ以上でもＯＫ

要は
「独立な試行なら
バラバラに確率を求めて
掛けてもＯＫ」

場合の数と確率【独立な試行の確率】 p.56～60

青チャートA: 例題 47～48

例題１５） 当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじがある。この中から 1 本ずつ 2 回続けてくじを引く。
2 本とも当たる確率を求めよ。ただし，引いたくじはもとに戻すものとする。 復元抽出

解答 1 回目のくじを引く試行を S，くじをもとに戻して 2 回目のくじを引く試行 を T とし，
試行 S で当たるという事象を A，試行 T で当たるという事象を B とすると

$$P(A)=\boxed{\frac{3}{10}},\quad P(B)=\boxed{\frac{3}{10}}$$

S と T は独立であるから，2 本とも当たるという事象 C の確率は

$$P(C)=P(A)P(B)=\boxed{\frac{3}{10}}\times\boxed{\frac{3}{10}}=\frac{9}{100}$$

練習４７） 次の確率を求めよ。

(1) 1 個のさいころと 1 枚の硬貨を投げるとき，さいころは 6 の約数の目が出て，硬貨は表が出る確率

解答 1 個のさいころを投げる試行を S， 1 枚の硬貨を投げる試行を T とし，
試行 S で 6 の約数の目が出るという事象を A， 試行 T で表が出るという事象を B とすると

$$P(A)=\boxed{\frac{4}{6}},\quad P(B)=\boxed{\frac{1}{2}}$$

S と T は独立であるから，求める確率は $P(A)P(B)=\boxed{\frac{4}{6}}\times\boxed{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

(2) 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目は 4 以上の目が出て，2 回目は 3 の倍数の目が出る確率

解答 1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，1 回目の試行を S，2 回目の試行を T とし，
試行 S で 4 以上の目が出るという事象を A，試行 T で 3 の倍数の目が出るという事象を B とすると $P(A)=\boxed{\frac{3}{6}}$，$P(B)=\boxed{\frac{2}{6}}$

S と T は独立であるから，求める確率は $P(A)P(B)=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$

練習４８）発芽率 80 %の種 A と，発芽率 75 %の種 B を 1 粒ずつ花壇に植えたとき，
A，B のうち**少なくとも一方が**発芽する確率を求めよ。 余事象を想定する

解答 種 A を 1 粒植えるという試行を S，種 B を 1 粒植えるという試行を T とし，
試行 S で A が発芽しないという事象を A，試行 T で B が発芽しないという事象を B とすると

$$P(A)=1-\frac{80}{100}=\frac{1}{5},\quad P(B)=1-\frac{75}{100}=\frac{1}{4}$$

独立なのでかけ算に

S と T は**独立**であるから，種 A，B がどちらも発芽しない確率は $P(A)P(B)=\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{20}$

種 A，B のうち少なくとも一方が発芽するという事象は，種 A，B がどちらも発芽しないという事象の**余事象**であるから，求める確率は

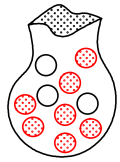
$$1-\frac{1}{20}=\frac{19}{20}$$

A	B
発芽	発芽
発芽	発芽せず
発芽せず	発芽
発芽せず	発芽せず

場合の数と確率【独立な試行の確率】 p.56～60

青チャートA: 例題 47～48

練習４９） 白玉 3 個，赤玉 7 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてからもとに戻す。この試行を 2 回行うとき，次の確率を求めよ。



(1) 1 回目と 2 回目に取り出した玉の色が同じである確率

(2) 1 回目と 2 回目に取り出した玉の色が異なる確率

方針 袋の中から最初に玉を 1 個取り出すという試行と，取り出した玉を袋に戻してから再び玉を取り出すという試行は独立である。

1 回目に赤玉を取り出す確率は $\frac{7}{10}$　　2 回目に赤玉を取り出す確率は $\frac{7}{10}$

1 回目に白玉を取り出す確率は $\frac{3}{10}$　　2 回目に白玉を取り出す確率は $\frac{3}{10}$

解答 (1) 1 回目と 2 回目に取り出した玉の色が同じであるという事象は，2 つの事象

[1] 2 回とも白玉　[2] 2 回とも赤玉　　題意を明確にする

の和事象であり，これらの事象は**互いに排反**である。　排反のときは和事象は足すだけ

[1] 1 回目に白玉を取り出す確率は $\frac{3}{10}$　　2 回目に白玉を取り出す確率は $\boxed{\frac{3}{10}}$

よって，2 回とも白玉である確率は $\frac{3}{10}\times\boxed{\frac{3}{10}}=\frac{9}{100}$

[2] [1] と同様にして，2 回とも赤玉である確率を計算すると $\frac{7}{10}\times\boxed{\frac{7}{10}}=\frac{49}{100}$

したがって，求める確率は $\frac{9}{100}+\frac{49}{100}=\frac{58}{100}=\frac{29}{50}$

(2) 1 回目と 2 回目に取り出した玉の色が異なるという事象は，1 回目と 2 回目の玉の色が同じであるという事象の**余事象**であるから，求める確率は

$1-\frac{29}{50}=\frac{21}{50}$

①	②
白	白
白	赤
赤	白
赤	赤

練習５０） 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 1 回目は偶数の目，2 回目は $\boxed{3 以下の目}$，3 回目は 5 以上の目が出る確率

(2) **少なくとも 1 回は**偶数の目が出る確率　　余事象を想定する

解答 1 個のさいころを投げる 3 回の試行は**独立**である。

(1) $\frac{3}{6}\times\boxed{\frac{3}{6}}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{12}$

(2) 3 回とも奇数の目が出る確率は $\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{8}$

よって，少なくとも 1 回は偶数の目が出る確率は

$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

奇	奇	奇
奇	奇	偶
奇	偶	奇
偶	奇	奇
奇	偶	偶
偶	奇	偶
偶	偶	奇
偶	偶	偶

場合の数と確率【独立な試行の確率】 p.56〜60

青チャートA: 例題 47〜48

4STEP数学Ａ　例題１９） 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，出る目の最大値が 4 である確率を求めよ。【青チャートＡ基本例題５１類題】

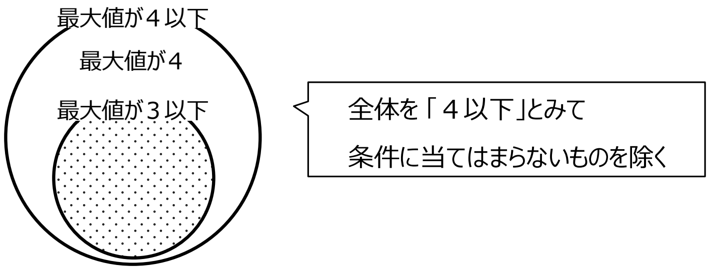
方針　出る目の最大値が４以下 ＝ 出る目がすべて４以下 ⇒　１～４の目しか出ない

（４が出てなくてもよい）

出る目の最大値が４　⇒　１～４の目しかでないが，**少なくとも１回は**４の目が出ている

出る目の最大値が３以下 ＝ 出る目がすべて３以下 ⇒　１～３の目しか出ない

（３が出てなくてもよい）



解答　出る目の最大値が 4 以下である確率は，出る目がすべて 4 以下である確率で $\left(\dfrac{4}{6}\right)^3$

出る目の最大値が 3 以下である確率は，出る目がすべて 3 以下である確率で $\left(\dfrac{3}{6}\right)^3$

よって，出る目の最大値が 4 である確率は　$\left(\dfrac{4}{6}\right)^3-\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{37}{216}$

「少なくとも１回は…」ときたら余事象

(最小値が k の確率) ＝ (最小値が k 以上の確率) − (最小値が $k+1$ 以上の確率)

(最大値が k の確率) ＝ (最大値が k 以下の確率) − (最小値が $k-1$ 以下の確率)

のように差分で考えよう