場合の数と確率【反復試行の確率】 p.61～63

青チャートA：例題 49～57

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】反復試行のときの確率の求め方をマスターしよう

□反復試行の確率

1 個のさいころを続けて投げる場合のように，同じ条件のもとで同じ試行を何回か繰り返し行うとき，各回の試行は独立である。このような試行を **反復試行** という。

例） 1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めてみよう。

さいころを投げる 3 回の試行は独立である

さいころを 1 回投げるとき，6 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$　それ以外の目が出る確率は $\frac{5}{6}$

3 回中何回目に 1 回 6 が出たかを選ぶので ${}_3\mathrm{C}_1$ 通りある。

1 回目	2 回目	3 回目	確率
⚅	×	×	$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$
×	⚅	×	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}$
×	×	⚅	$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$

例えば，1 回目に 6 の目が出て，2 回目と 3 回目はどちらも 6 以外の目が出る事象の確率は，$\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}$

出る順番が変わっても，掛けているものの数は同じ $\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$

順番を決める　　**試行の掛け算**

$$\boxed{{}_3\mathrm{C}_1}\times\boxed{\frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2}=3\times\frac{1}{6}\times\frac{25}{36}=\frac{25}{72}$$

同じ条件のもとでの試行の繰り返しを **反復試行** という。独立な試行を何回か繰り返すとき，反復試行の確率について，一般に次のことがいえる。

反復試行の確率

1 回の試行で事象 A の起こる確率を p とする。

この試行を n 回行うとき，事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\times p^r\cdot(1-p)^{n-r}$$

A が ○ 回起こり，$\overline{A}$ が $(n-○)$ 回起こる確率

<注意>　一般に，正の数 a に対して，$a^0=1$ と定める。

反復試行の解き方の基本的な流れ） 1 枚の硬貨を 5 回投げて表がちょうど 2 回出る確率を求める。

【まずは 1 回だけ行うときを考える】

硬貨を 1 回投げるとき，表が出る確率は $\frac{1}{2}$，　裏が出る確率は $\frac{1}{2}$

【次に反復試行を考える】

反復試行の確率は公式に頼らない
この文章が立てられれば反復試行は大丈夫

5 回投げて表がちょうど 2 回出る確率

⇒ 5 回中 2 回　　表が 2 回　　残り 3 回裏　が出る

$${}_5\mathrm{C}_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{5}{16}$$　㊳

表の回数　裏の回数

表の確率　裏の確率

ヘボン式ローマ字で書くと
5 k a i －c h u －2 k a i

場合の数と確率【反復試行の確率】 p.61～63

青チャートA: 例題 49～57

練習５１） 1 個のさいころを 5 回投げるとき，6 の目がちょうど 2 回出る確率を求めよ。

解答 さいころを 1 回投げるとき，6 の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，その他の目が出るのは $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

1～5 が出るとみて $\frac{5}{6}$ と求めることもできるが，余事象でも出せるように

よって，5 回投げて 6 の目がちょうど 2 回出る確率は

5 回中 2 回　6 の目が 2 回　残り 3 回はそれ以外　なので

$${}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{5^3}{6^3}=\frac{625}{3888}$$

独立な試行

練習５２） 白玉 6 個，赤玉 4 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，**色を調べてからもとに戻す。**
この試行を 5 回続けて行うとき，次の確率を求めよ。

赤 白 白 白 白
白 白 白 白 白

(1) 白玉が 4 回以上出る確率

解答 1 回の試行で，白玉が出る確率は $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，赤玉が出る確率は $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

この試行を 5 回行って白玉が 4 **回以上**出る確率は

4 **回**出る確率　と　5 **回**出る確率　の和事象である

5 回中 4 回　白が 4 回　残り 1 回は赤

$${}_5C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

5 回中 5 回　白が 5 回

「５回連続」なので順番は生じない ⇒ ${}_{\bigcirc}C_{\square}$ は不要 ⇒積の法則のみでＯＫ

$$=5\times\frac{3^4}{5^4}\times\frac{2}{5}+\frac{3^5}{5^5}$$

$$=\frac{810}{3125}+\frac{243}{3125}$$

足し算をするので，約分はしない

$$=\frac{1053}{3125}$$

①	②	③	④	⑤
				2 度目の白

1～4 回目には白は 1 回 ⇒よって 赤は 3 回

(2) 5 回目に 2 度目の白玉が出る確率

解答 5 回目に 2 度目の白玉が出るのは，

4 回目までに白玉がちょうど 1 回出て，　5 回目に 2 度目の白玉が出る　場合である。

よって，求める確率は

4 回中 1 回　白が 1 回　残り 3 回は赤　　5 回目は白　　分けて考える

$${}_4C_1\left(\frac{3}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^3\times\frac{3}{5}=4\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2^3}{5^3}\times\frac{3}{5}$$

赤 赤 白 赤　　白

$$=\frac{288}{3125}$$

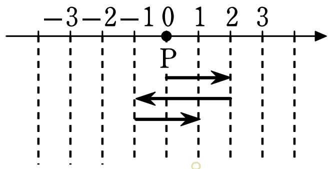
場合の数と確率【反復試行の確率】 p.61～63

青チャートA: 例題 49～57

応用例題８）ランダム・ウォーク（酔歩の問題）

数直線上を動く点 P が原点の位置にある。
1 個のさいころを投げて，1 または 2 の目が出たときには P は正の向きに 2 だけ進み，他の目が出たときには P は負の向きに 1 だけ進む。さいころを 6 回続けて投げたとき，点 P が原点に戻っている確率を求めよ。

酔っ払いの千鳥足をイメージ



方針　まずは 1 または 2 の目の回数を r 回とおく。

6 回投げるので，裏の回数は $(6-r)$ 回である。

1 または 2 の目が出ると $+2$ 進み，他の目が出たら -1 進むとみると，

(進む量)×(回数) であるから 6 回投げ終わったときの P の座標は

$$2\times r+(-1)\times(6-r)=2r-6+r=3r-6$$

である。この座標がどこに到達するかで回数を求める所から始めよう。

連続的にしたものは，物理学におけるブラウン運動であり，顕微鏡下での花粉粒子の不規則運動をいう。そこから類似した現象として熱雑音なども範疇として説明される。

解答　さいころを 1 回投げて， 1 または 2 の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，他の目が出る確率は $\frac{2}{3}$

6 回のうち， 1 または 2 の目が r 回出るとすると，他の目は $(6-r)$ 回出るから，P の座標は

$$2\times r+(-1)\times(6-r)=2r-6+r=3r-6$$

6 回投げたとき原点にもどるためには

$$3r-6=0$$

が成り立てばよい。これを解くと　$r=2$

よって，6 回のうち1 または 2 の目がちょうど 2 回出ればよい。

６回中２回　１または２が２回　残り４回その他

が出るときなので，求める確率は

$$ {}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{2^4}{3^4}$$

$$=\frac{80}{243}$$

例えば

6 回投げたとき 3 にいるとすると

$$3r-6=3$$

$r=3$　つまり 1 または 2 の目は 3 回

6 回投げたとき 1 にいるとすると

$$3r-6=1$$

$$\therefore\ r=\frac{7}{3}$$

r は整数なので到達しない

青チャート数学Ａ　例題５３）ボタンを 1 回押すと，文字 X，Y，Z のうちいずれか 1 つがそれぞれ $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$ の確率で表示される機械がある。ボタンを続けて 5 回押すとき，次の確率を求めよ。（隣の人と方針を確認しよう）

(1)　X が 3 回，Y，Z がそれぞれ 1 回ずつ表示される確率

解答　(1)　ボタンを 5 回押したときに，X が 3 回，Y が 1 回，Z が 1 回表示される場合の数は

$$\frac{5!}{3!1!1!}=20$$

求める確率は　$20\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^1=\frac{20\cdot2^4}{5^5}=\frac{64}{625}$

3 個以上の場合の順番決定は

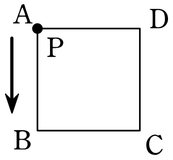
同じものを含む順列 を活用

(多項定理の場合と同様に)

場合の数と確率【反復試行の確率】 p.61〜63

青チャートA：例題 49〜57

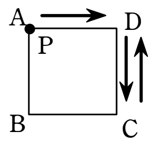
例題） 正方形の頂点を反時計回りに A，B，C，D とし，この正方形上を動く点 P がある。点 P は頂点 A から出発し，1 秒ごとに隣の頂点へ移動する。ただし，反時計回りに移動する確率と時計回りに移動する確率は等しいものとする。このとき，点 P が次の位置にある確率を求めよ。



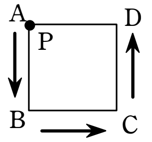
(1) 3 秒後に頂点 D にある。　　　　(2) 4 秒後に頂点 A にある。

【青チャート数学Ａ重要例題５６類題】

解答 (1) 次の 2 つの移動の仕方がある。



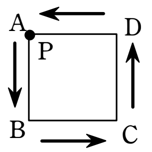
[1] 時計回りに 2 回，反時計回りに 1 回移動する　この確率は $_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$



[2] 反時計回りに 3 回移動する　この確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

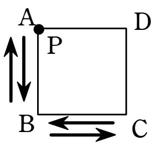
(2) 次の 3 つの移動の仕方がある。

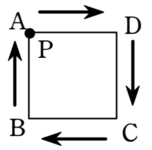


[1] 時計回りに 4 回移動する　この確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

[2] 時計回りに 2 回，反時計回りに 2 回移動する　この確率は $_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$

[3] 反時計回りに 4 回移動する　この確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$





これらは互いに排反であるから，求める確率は $\frac{1}{16}+\frac{6}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$

例題） 青球 6 個と赤球 n 個 $(n\geqq 2)$ が入っている袋から，3 個の球を同時に取り出すとき，青球が 1 個で赤球が 2 個である確率を P_n とする。

(1) P_n を n の式で表せ。 (2) $P_n>P_{n+1}$ を満たす最小の n を求めよ。 (3) P_n を最大にする n の値を求めよ。

【青チャート数学Ａ重要例題５７類題】

解答 (1) 袋の中には合計 $n+6$ 個の球が入っているから

$$P_n=\frac{_6C_1\cdot {_nC_2}}{_{n+6}C_3}=6\cdot\frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{6}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$

$$=\frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}$$

全体：$_{n+6}C_3$ 通り
部分：6 個の青球から 1 個
n 個の赤球から n 個

(2) $P_n>P_{n+1}$ とすると　$\frac{18n(n-1)}{(n+6)(n+5)(n+4)}>\frac{18(n+1)n}{(n+7)(n+6)(n+5)}$

$n\geqq 2$ であるから，分母を払って整理すると

$(n+1)(n+4)<(n+7)(n-1)$　　よって　$n>11$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=12$

$P_n>P_{n+1}$ （減少）
$\Leftrightarrow\ 1>\frac{P_{n+1}}{P_n}$
$P_n<P_{n+1}$ （増加）
$\Leftrightarrow\ 1<\frac{P_{n+1}}{P_n}$

(3) (2) と同様にして，$n<11$ のとき $P_n<P_{n+1}$，$n=11$ のとき $P_n=P_{n+1}$

(2) の結果と合わせると　$P_2<\cdots\cdots<P_{10}<P_{11}=P_{12}>P_{13}>\cdots\cdots$

よって，P_n を最大にする n の値は　$n=11，12$