場合の数と確率【条件付き確率】 p.64～72

青チャートA: 例題 58～64

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】条件付き確率（独立ではないとき）の考え方を身に付けよう

□条件付き確率

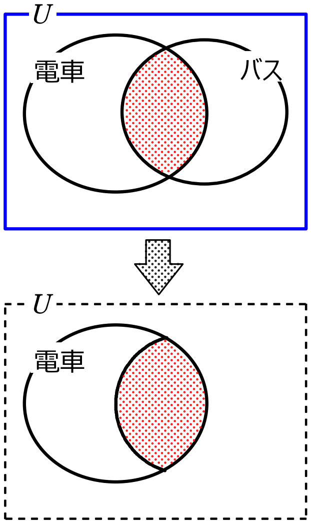
例 1 7） 100 人の生徒について，通学で電車とバスを利用しているか調査したところ，右の表のようになった。この 100 人の中から 1 人を選び出すとき，選び出された生徒が電車を利用しているという事象を A，バスを利用しているという事象を B とする。

バス＼電車	利用している	利用していない	計
利用している	12	20	32
利用していない	30	38	68
計	42	58	100

事象 B の確率は $P(B)=\dfrac{32}{100}=\dfrac{8}{25}$ である。

次に，選び出された生徒が電車を利用していることがわかっているとき，その生徒がバスも利用している確率 p を考えてみよう。選び出された生徒は，電車を利用している 42 人の中の 1 人である。その 42 人の中で，バスを利用している生徒は 12 人である。

したがって $p=\dfrac{12}{42}=\dfrac{2}{7}$ 終



例17 で考えた確率 p は

事象 A が起こったときに，事象 B が起こる確率

である。このような確率を，事象 A が起こったときの事象 B が起こる **条件付き確率** といい，$P_A(B)$ で表す。

小さい文字で条件を示す

例17 においては，$P_A(B)=p=\dfrac{12}{42}=\dfrac{2}{7}$ である。

各根元事象が同様に確からしい試行において，その全事象を U とする。また，A, B を 2 つの事象とし，$n(A)\neq 0$ とする。このとき，条件付き確率 $P_A(B)$ は，

A を全事象とした場合の事象 $A\cap B$ の起こる確率

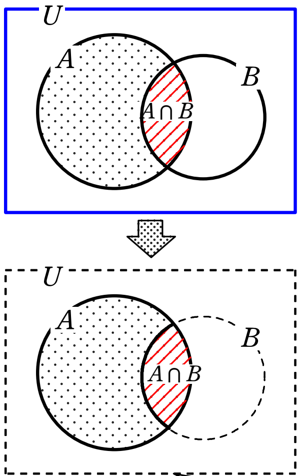
と考えられ，次のように表される。

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)} \quad \cdots\cdots ①$$

① の右辺の分母と分子を $n(U)$ で割ると，$\dfrac{n(A)}{n(U)}=P(A)$，

$\dfrac{n(A\cap B)}{n(U)}=P(A\cap B)$ であるから，次の等式が得られる。

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \cdots\cdots ②$$



条件によって

分母(全体)が変わると見る

実際の処理では **樹形図やベン図を使っても求められる**

場合の数と確率【条件付き確率】 p.64～72

青チャートA: 例題 58～64

例題１９） ある鉄道の乗客のうち，全体の 40 % が定期券利用者で，全体の15 % が学生の定期券利用者である。定期券利用者の中から 1 人を選び出すとき，その人が学生である確率を求めよ。

解答 乗客全体から選び出された 1 人が定期券利用者であるという事象を A，学生であるという事象を Bとすると

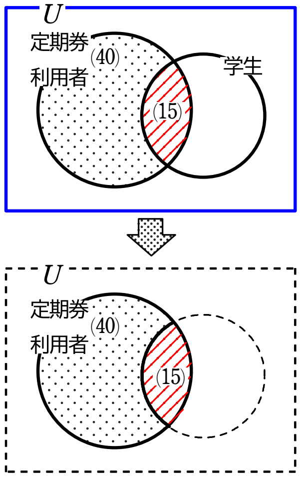
$$P(A)=\frac{40}{100},\quad P(A\cap B)=\frac{15}{100}$$

よって，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{15}{100}\div\frac{40}{100}=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$$

定期券利用者 40 %の中に学生(15 %分) が含まれるので

$$P_A(B)=\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$$



□確率の乗法定理

●―確率の乗法定理

$P_A(B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ の分母を払うと，次の **確率の 乗法定理** が得られる。

確率の乗法定理 積事象（共通部分）

2 つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は $P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$

例題２０改） 当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじを，A，B の 2 人がこの順に 1 本ずつ引く。

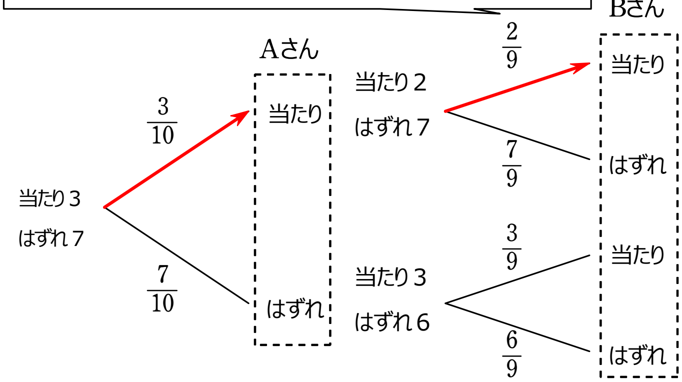
ただし，**引いたくじはもとにもどさない。** 条件付きの合図

この試行において，A，B の 2 人とも当たる確率を求めよ。

スタートからゴールまで通ったところの確率を掛ける

解答 A が当たるという事象を A， B が当たるという事象を B とすると，

ここは「 $P_A(B)$ ：Aが当たりであったときにBも当たりである確率」



$P(A\cap B)$ は，

矢印のルートを通るときなので

$$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\boxed{\frac{1}{15}}$$

場合の数と確率【条件付き確率】 p.64～72

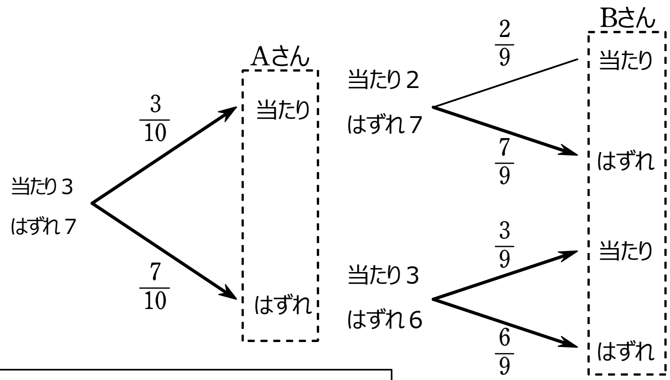
青チャートA: 例題 58～64

練習） 例題２０改において，次の確率を求めよ。

(1) A が当たり，B がはずれる確率　(2) A がはずれ，B が当たる確率

(3) 2 人ともはずれる確率　(4) B が当たる確率，はずれる確率

今回は約分しているが約分は答えを出す直前にすることが多い



$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\boxed{\frac{2}{30}}$ B○

(1) $\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\boxed{\frac{7}{30}}$ B×

(2) $\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\boxed{\frac{7}{30}}$ B○

(3) $\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}=\boxed{\frac{14}{30}}$ B×

二人とも引き終わった後なので、足し算をする

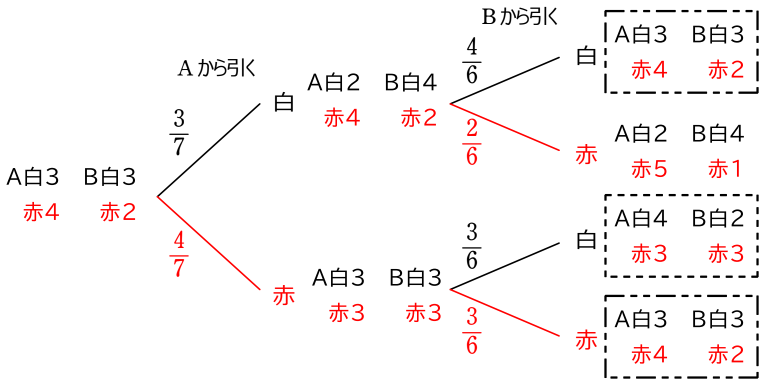
(4) B が当たる確率は $\frac{2}{30}+\frac{7}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$　B が外れる確率は $\frac{7}{30}+\frac{14}{30}=\frac{21}{30}=\frac{7}{10}$

補足　A が当たる確率は $\frac{3}{10}$　A が外れる確率は $\frac{7}{10}$ であり、先に引いても後に引いても同じ確率であることがわかる。 $P(B)=P(A)P_A(B)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$

深める　C が増えてくじ引きをしたとき C が当たる確率は？

応用例題９） 袋 A には白玉 3 個，赤玉 4 個，袋 B には白玉 3 個，赤玉 2 個が入っている。まず，袋 A から 1 個の玉を取り出して袋 B に入れ，よくかき混ぜて，袋 B から 1 個の玉を取り出して袋 A に入れる。このとき，袋 A の白玉の個数が初めと変わらない確率を求めよ。

方針　変化を具体的に確認しながら確率を考えてみよう



$\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{12}{42}$

$\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}=\frac{6}{42}$

$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{12}{42}$

$\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{12}{42}$

A の袋の中の白玉の個数が変わっていない確率は $\frac{12}{42}+\frac{12}{42}=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$

補足　A の袋の中の白玉の個数が増えている確率は $\frac{12}{42}=\frac{2}{7}$

場合の数と確率【条件付き確率】 p.64～72

青チャートA: 例題 58～64

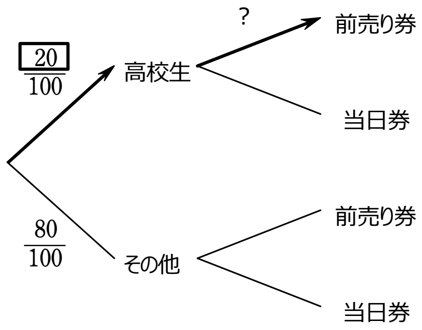
例題） ある博物館の入館者のうち、全体の 20% $\left(\frac{20}{100}\right)$ が高校生で，

全体の 15% $\left(\frac{15}{100}\right)$ が<u>前売り券</u>で入館した<u>高校生</u> である。

入館した高校生の中から 1 人を選び出すとき， 条件付き

その人が前売り券で入館している確率を求めよ。

解答



$P(A\cap B)=P(A)\cdot P_A(B)$

$$\frac{20}{100}\times ?=\boxed{\frac{15}{100}}$$

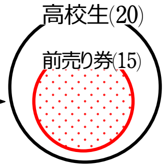
$$?=\frac{15}{100}\div\frac{20}{100}$$

$$=\frac{15}{100}\times\frac{100}{20}$$

$$=\frac{3}{4}$$

※分母が100で

統一されているので



$\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$

で求めることができる

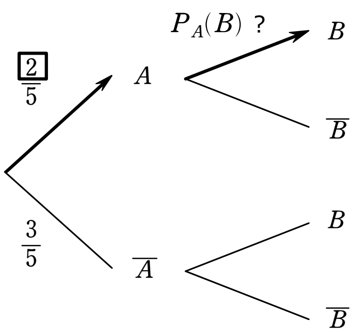
終

例題） 大人と子どもの人数の比が 3：2 であるグループに，ある提案をしたところ，子どもで賛成した人数は全体の 15 %であった。このグループの子どもの中から 1 人を選び出すとき，その人が提案に賛成である確率を求めよ。

解答

グループ全体から選び出された 1 人が，子どもであるという事象を A，提案に賛成であるという事象を B とすると

$P_A(B)$ は？ A を全事象（分母）として考えてみよう



$$\frac{2}{5}\times P_A(B)=\boxed{\frac{15}{100}}$$

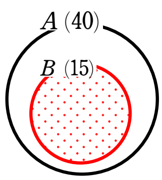
$$P_A(B)=\frac{15}{100}\div\frac{2}{5}$$

$$=\frac{15}{100}\times\frac{5}{2}$$

$$=\frac{3}{8}$$

※分母を 100 で統一すると

$\frac{2}{5}=\frac{40}{100}$， $\frac{15}{100}$



$\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$ と求めることができる

場合の数と確率【条件付き確率】 p.64～72

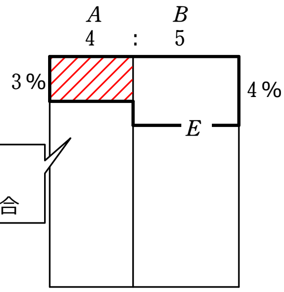
青チャートA：例題 58～64

□原因の確率 ～ 条件付き確率の考え方を利用して，次のような問題について考えよう。

例１） ある製品を製造する工場 A，B があり，A の製品には 3 %，B の製品には 4 % の不良品が含まれている。A の製品と B の製品を，4 : 5 の割合で混ぜた大量の製品の中から 1 個を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(1) それが不良品である確率

(2) 不良品であったときに，それが A の製品である確率



解答

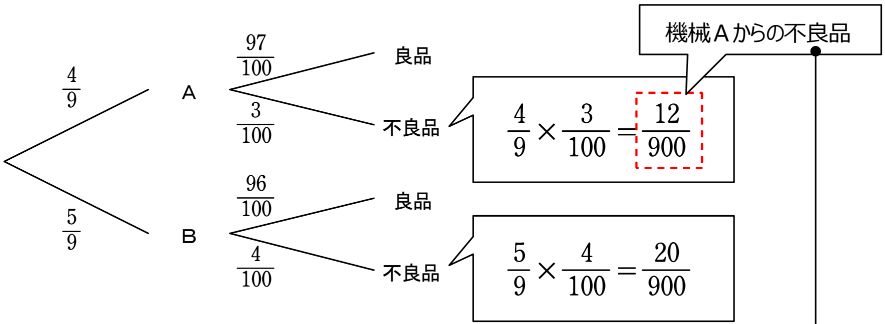
(1) 選び出した部品が，A の製造であるという事象を A，B の製造であるという事象を B とすると

A からの部品とB からの部品が 4 : 5 の割合で大量に混ざっている中から 1 個を選び出すので

A の部品を選ぶ確率は $P(A)=\dfrac{4}{9}$，B の部品を選ぶ確率は $P(B)=\dfrac{5}{9}$，

また，機械 A の不良品の発生する割合は $P_A(E)=\dfrac{3}{100}$，

機械 A の不良品の発生する割合は $P_B(E)=\dfrac{4}{100}$



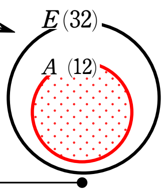
よって $P(E)=\dfrac{12}{900}+\dfrac{20}{900}=\boxed{\dfrac{32}{900}}=\dfrac{8}{225}$

両方からの不良品

(2) 求めるのは条件付き確率 $P_E(A)$ であるから

$$P_E(A)=\boxed{\frac{12}{32}}=\frac{3}{8}$$

まとめると…



別解 $P_E(A)=\dfrac{P(E\cap A)}{P(E)}=\dfrac{P(A\cap E)}{P(E)}=\dfrac{12}{900}\div\dfrac{32}{900}=\dfrac{3}{8}$

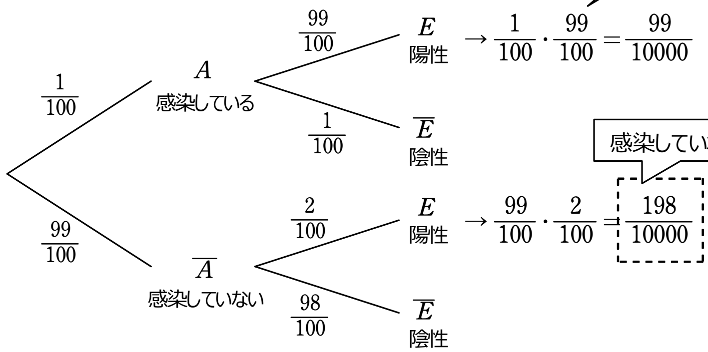
場合の数と確率【条件付き確率】 p.64～72

青チャートA：例題 58～64

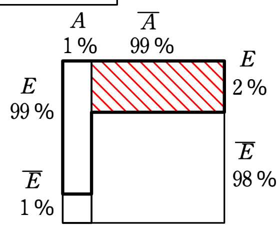
例２） ある病原菌の検査試薬は，病原菌に感染しているのに誤って陰性と判断する確率が１％，感染していないのに誤って陽性と判断する確率が２％である。全体の１％がこの病原菌に感染している集団から１つの個体を取り出すとき，「陽性だったときに，実際には病原菌に感染していない確率」を求めよ。

解答　取り出した個体が感染しているという事象を A，検査結果が陽性であるという事象を E とする。
このとき，感染していないという事象は $\overline{A}$ で表され

$P(A)=\dfrac{1}{100}$，$P(\overline{A})=\dfrac{99}{100}$，
$P_A(E)=\dfrac{99}{100}$，$P_{\overline{A}}(E)=\dfrac{2}{100}$



感染していないけど陽性



陽性となるのはその個体が感染している場合と，感染していない場合があり，それらの事象は互いに排反であるから

$$P(E)=\frac{99}{10000}+\frac{198}{10000}=\boxed{\frac{297}{10000}}$$

とにかく陽性

求める確率は，条件付き確率 $P_E(\overline{A})$ であるから

$$P_E(\overline{A})=\boxed{\frac{198}{297}}=\frac{2}{3}$$

まとめると…

別解　$P_E(\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}\cap E)}{P(E)}$
$=\dfrac{198}{10000}\div\dfrac{297}{10000}=\dfrac{198}{297}=\dfrac{2}{3}$

＜補足＞　例で求めた条件付き確率 $P_E(A)$ は，次のような確率である。

事象 E が起こる原因として事象 A，B の２つが考えられるとき，

事象 E が起こったこと **（結論）** を知って，それが原因 A から起こったと考えられる **（原因）** 確率

このことから，この $P_E(A)$ を **原因の確率** ということがある。また，これらから

$$P_E(A)=\frac{P(A)P_A(E)}{P(A)P_A(E)+P(\overline{A})P_{\overline{A}}(E)}$$

が成り立つ。これを **ベイズの定理** という。

一般に，n 個の事象 A_1，A_2，……，A_n が互いに排反であり，そのうちの一つが必ず起こるものとする。このとき，任意の事象 B に対して，次のことが成り立つ。

トーマス・ベイズ
Thomas Bayes
1701～1761

$$P_E(A)=\frac{P(A_k)P_{A_k}(B)}{P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\cdots\cdots+P(A_n)P_{A_n}(B)}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$$

Column

モンティ・ホール問題
～条件付き確率とゲーム～

モンティ・ホール(Monty Hall)が司会を務めるアメリカのゲームショー番組「Let's make a deal」の中で次のような問題が出されました。

「プレーヤーの前に閉じた3つのドアがあって、1つのドアの後ろには景品の新車が、2つのドアの後ろには、はずれを意味するヤギがいる。プレーヤーは新車のドアを当てると新車がもらえる。
プレーヤーが1つのドアを選択した後、司会のモンティが残りのドアのうちヤギがいるドアを開けてヤギを見せる。
ここでプレーヤーは、最初に選んだドアを、残っている開けられていないドアに変更してもよいと言われる。
ここでプレーヤーはドアを変更すべきだろうか？」

Q 皆さん方なら変更しますか？理由をあげられる人は理由も考えてみましょう。

解答 変えるべきかどうかは, 選び直した方が当たりの確率は高くなるかどうかで判断しよう。
3 枚のドアを A, B, C として, 最初にあなたが選んだドアを A,
司会がはずれを表示したドアを C とする。 A, B, C が当たりという事象をそれぞれ A, B, C とおくと, A, B, C は排反であり, かつ

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$$

司会が「C がはずれである」と表示する事象を X とおくと

$$P_A(X)=\frac{1}{2},\ P_B(X)=1,\ P_C(X)=0$$

以上から, $P(X)=P(A)P_A(X)+P(B)P_B(X)+P(C)P_C(X)=\frac{1}{2}$ であるから

$$P_X(B)=\frac{P(B\cap X)}{P(X)}=\frac{P(B)P_B(X)}{P(X)}=\frac{2}{3}$$

同様にして, $P_X(A)=\frac{1}{3}$ であることもわかるので, **選び直した方が当たる確率が高い。**

パターン	ドアA	ドアB	ドアC	司会の選択	Aに留まる	他に変える
①	当たり	はずれ	はずれ	B か C	○	×
②	はずれ	当たり	はずれ	C	×	○
③	はずれ	はずれ	当たり	B	×	○

この結果は心理的には納得しがたい人も居るかもしれない。そのため「モンティ・ホール・ジレンマ」や「モンティ・ホール・パラドックス」と称され, 直感で正しいと思える解答と, 論理的に正しい解答が異なる問題」の例としてあげられる。また, 納得しがたい場合は, 例えばドアが100枚であった場合など極端な場合を考えてみるとよい。