場合の数と確率【期待値】 p.73～76

青チャートA：例題 65～69

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】期待値の考え方を身につけ、いろいろな問題を考えよう

□期待値

	賞金	本数
1 等	10000 円	5 本
2 等	1000 円	20 本
3 等	200 円	75 本
はずれ	0 円	900 本
計		1000 本

総数 1000 本のくじに，右の表のような賞金がついている。この中から 1 本のくじを引く試行において，どれだけの賞金が期待されるかを考えよう。

この試行においては，どのくじを引くかによって，10000 円，1000 円，200円，0 円のどれかの賞金額が定まる。

賞金の総額は　$10000\times5+1000\times20+200\times75+0\times900=85000$

であるから，くじ 1 本あたりの賞金額の平均を求めると

$$\frac{1}{1000}(10000\times5+1000\times20+200\times75+0\times900)=85 \quad \cdots\cdots ①$$

となる。①の式は，次のように表すことができる。

$$10000\times\frac{5}{1000}+1000\times\frac{20}{1000}+200\times\frac{75}{1000}+0\times\frac{900}{1000}=85$$

ここで，1 本のくじを引いたときの賞金額を X 円とすると，X が 10000，1000，200，0 である確率は，それぞれ　$\frac{5}{1000}$，$\frac{20}{1000}$，$\frac{75}{1000}$，$\frac{900}{1000}$

である。したがって，① は，X の値とそれに対する確率の積の和が，くじ 1 本あたり，平均的に期待される賞金額であることを示している。

すなわち，くじ 1 本当たりの賞金額は 85 円と考えられる。右上の表を，確率を示す表に書き換えると，次のようになる。

賞金	10000 円	1000 円	100 円	0 円	計
確率	$\frac{5}{1000}$	$\frac{20}{1000}$	$\frac{75}{1000}$	$\frac{900}{1000}$	1

一般に，ある試行の結果によって値の定まる変量 X があって，X のとりうる値を x_1，x_2，……，x_n とし，X がこれらの値をとる確率を，それぞれ p_1，p_2，……，p_n とすると

> X がとる値を並べたとき，k 番目の値を x_k と表し，X の値が x_k となる確率を p_k と表している。

$$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$$

> E は，期待値を意味する expectation の頭文字である。

が成り立つ。このとき，x_1，x_2，……，x_n の各値に，それぞれの値をとる確率 p_1，p_2，……，p_n を掛けて加えた値 $x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$ を，変量 X の **期待値** といい，E で表す。

期待値

変量 X のとりうる値を x_1，x_2，……，x_n とし，X がこれらの値をとる確率を，それぞれ p_1，p_2，……，p_n とすると，X の期待値 E は

$$\boldsymbol{E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n} \quad ただし\ p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$$

X	x_1	x_2	x_3	…	x_n	計
確率	p_1	p_2	p_3	…	p_n	1

縦に掛けて　横に足す

場合の数と確率【期待値】 p.73～76

青チャートA: 例題 65～69

例題２２） 1 個のさいころを 1 回投げるとき，出る目の期待値 E を求めよ。

出る目を X とすると，X の各値と，
X がその値をとる確率は，右の表のようになる。

X	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

よって，出る目の期待値は

$$E=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$

$$=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$$

終

練習６３） 5 枚の硬貨を同時に投げて，表の出た硬貨の枚数が 5，4，3 の場合に，それぞれ得点 40，16，4 を得るが，それ以外の場合には得点は得られないとする。得点の期待値を求めよ。

解答 表の出た硬貨の枚数が 5，4，3 となる確率は，それぞれ

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32},$$

$${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32},$$

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{10}{32}$$

5 枚中 4 枚が表
5 枚中 3 枚が表の反復試行

よって，確率の表は次のようになる。

得点	40	16	4	0	計
確率	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{16}{32}$	1

表が２～０枚のときは０点なので
$1-\left(\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}\right)=\frac{16}{32}$

したがって，求める期待値は

$$40\times\frac{1}{32}+16\times\frac{5}{32}+4\times\frac{10}{32}+0\times\frac{16}{32}=\frac{160}{32}=5$$

場合の数と確率【期待値】 p.73～76

青チャートA: 例題 65～69

□期待値の応用

期待値の考えを，結果が不確実な状況下において，どの選択が有利かを判断する際の基準として利用することができる。

例題２３） 次の 2 つの場合のいずれかが選べるとき，どちらを選んだ方が，得られる金額の期待値が大きいか。

[1] 確実に 30000 円得られる場合

[2] 40000 円得られる確率が 0.8 で，何も得られない確率が 0.2 である場合

解答 [1] を選んだときの期待値は 30000 円

[2] を選んだときの期待値は $40000\times0.8+0\times0.2=32000$ すなわち 32000 円

よって，[2] を選ぶ方が期待値が大きい。

練習６４） 次の [1]～[3] の 3 つの場合の中で，得られる金額の期待値が最も大きいのはどれか。

[1] 確実に 600 円得られる場合

[2] 硬貨を 1 枚投げて，表が出たら 1000 円，裏が出たら 500 円得られる場合

[3] さいころを 1 回投げて，200 円にでた目を掛けた金額が得られる場合

解答 [1] を選んだときの期待値は 600 円

[2] を選んだときの期待値は $1000\times\frac{1}{2}+500\times\frac{1}{2}=750$ すなわち 750 円

[3] を選んだときの期待値は

出目	1	2	3	4	5	6
金額	200	400	600	800	1000	1200
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$200\times\frac{1}{6}+400\times\frac{1}{6}+600\times\frac{1}{6}+800\times\frac{1}{6}+1000\times\frac{1}{6}+1200\times\frac{1}{6}$$

$$=200\times(1+2+3+4+5+6)\times\frac{1}{6}=700$$ すなわち 700 円

よって，[2] を選ぶ方が期待値が大きい。

場合の数と確率【期待値】 p.73～76

青チャートA: 例題 65～69

応用例題１２） 赤玉 3 個，白玉 5 個が入っている袋がある。この袋から玉を 3 個同時に取り出し，取り出された赤玉 1 個について賞金 100 円を受け取るゲームがある。このゲームの参加料が 120 円であるとき，このゲームに参加することは得であるといえるか。

方針　受け取る金額の期待値が参加料より大きいときに得であると判定する。

まずは期待値を計算

解答　取り出された 3 個に含まれる赤玉の個数は 0，1，2，3 のいずれかである。

赤玉が 0 個となる確率は　$\dfrac{{}_5C_3}{{}_8C_3}=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\dfrac{3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}=\dfrac{10}{56}$

赤玉が 1 個となる確率は　$\dfrac{{}_3C_1\times{}_5C_2}{{}_8C_3}=\dfrac{3\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot1}\cdot\dfrac{3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}=\dfrac{30}{56}$

赤玉が 2 個となる確率は　$\dfrac{{}_3C_2\times{}_5C_1}{{}_8C_3}=\dfrac{3\cdot5}{1\cdot1}\cdot\dfrac{3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}=\dfrac{15}{56}$

赤玉が 3 個となる確率は　$\dfrac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=1\cdot\dfrac{3\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}=\dfrac{1}{56}$

よって，受け取る賞金額を X 円とすると，右のような表ができる。

X の値	0	100	200	300	計
確率	$\dfrac{10}{56}$	$\dfrac{30}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{1}{56}$	1

ゆえに，ゲームに参加したときの賞金額の期待値は

$$0\times\frac{10}{56}+100\times\frac{30}{56}+200\times\frac{15}{56}+300\times\frac{1}{56}=\frac{6300}{56}=112.5$$

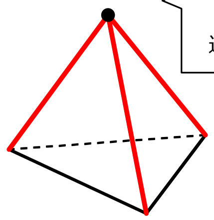
よって，賞金額の期待値がゲームの参加料 120 円より小さいから，
このゲームに参加することは得であるとはいえない。

期待値 <参加料
(参加するメリットが低い)

場合の数と確率【期待値】 p.73～76

青チャートA: 例題 65～69

青チャート数学Ａ EXERCISES５０） 同じ長さの赤と白の棒を 6 本使って正四面体を作る。ただし，各辺が赤である確率は $\dfrac{1}{3}$，白である確率は $\dfrac{2}{3}$ とする。



1つの頂点からのびる辺の数は３本まで

(1) 赤い辺の本数が 3 である確率を求めよ。

(2) 1 つの頂点から出る赤い辺の本数の期待値を求めよ。

(3) 赤い辺で囲まれる面が 1 つである確率を求めよ。

解答

(1) 各辺のうち，赤が 3 本，白が 3 本であるから，求める確率は ${}_6C_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{160}{729}$

(2) 1 つの頂点から出る赤い辺の本数を Xとすると，X のとりうる値は $X=0$，1，2，3

それぞれの値をとる確率は

$X=0$ のとき $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$ $X=1$ のとき ${}_3C_1\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{12}{27}$

$X=2$ のとき ${}_3C_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{6}{27}$ $X=3$ のとき $\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

よって，求める期待値は $0\times\dfrac{8}{27}+1\times\dfrac{12}{27}+2\times\dfrac{6}{27}+3\times\dfrac{1}{27}=1$ (本)

統計を学習すると二項分布の期待値は np ということを学ぶ

(3) 赤い辺で囲まれる面が 1 つであるとき，赤い辺は 3 本または 4 本である。

[1] 赤い辺が 3 本，白い辺が 3 本のとき

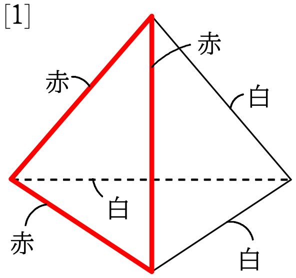
赤い辺で囲まれる面の選び方は 4 通り

そのおのおのについて，白い辺は自動的に決まる。

よって，このときの確率は

$$4\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{32}{729}$$

[1]



[2] 赤い辺が 4 本，白い辺が 2 本のとき

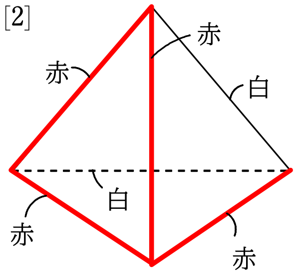
赤い辺で囲まれる面の選び方は 4 通り

そのおのおのについて，残りの赤い辺と白い辺の選び方は ${}_3C_1$ 通り

よって，このときの確率は

$$4\times{}_3C_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{48}{729}$$

[2]



[1]，[2] から，求める確率は $\dfrac{32}{729}+\dfrac{48}{729}=\dfrac{80}{729}$

場合の数と確率【期待値】 p.73～76

青チャートA: 例題 65～69

青チャート数学Ａ 例題６９） 1 つのさいころを振って出た目の数だけ得点がもらえるゲームがある。
ただし，出た目が気に入らなければ，1 回だけ振り直すことを許すとする。
このゲームでもらえる得点の期待値が最大になるようにふるまったとき，その期待値を求めよ。

解答 1 つのさいころを振って出る目の期待値は

$$(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\ (=3.5)$$

したがって，3 以下なら振り直し，4 以上ならそのままとする。

期待値＜出た目
ならそのままがよい
期待値＞出た目
なら振り直した方がよい

すなわち，1 回目に出た目を X とするとき，$X=4$，5，6 の場合は振り直さない。

また，振り直したときに 2 回目に出た目を Y とすると

$$\begin{aligned}(X,\ Y)=&(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\\ &(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\\ &(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (3,\ 6)\end{aligned}$$

したがって，求める期待値は

$$\left(1\times\frac{1}{6^2}+2\times\frac{1}{6^2}+3\times\frac{1}{6^2}+4\times\frac{1}{6^2}+5\times\frac{1}{6^2}+6\times\frac{1}{6^2}\right)\times 3$$

１回目が１～３で
２回目が１～６
→２回目の出た目を
採用する

$$+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$

１回目が４～６なら
そのまま採用

$$=\frac{17}{4}$$