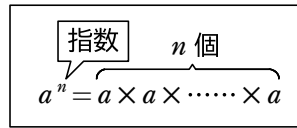


【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】指数法則を使いこなせるようになろう

□ 指数の拡張

a の累乗 a^n については、指数 n が正の整数の場合を学んでいる。
ここでは、指数の範囲を整数、有理数、実数と順に拡張していこう。



○ 0 や負の整数の指数

m, n を正の整数とすると、次の指数法則が成り立つことは、既に数学 I で学んでいる。

$$1 \quad a^m a^n = a^{m+n} \quad 2 \quad (a^m)^n = a^{mn} \quad 3 \quad (ab)^n = a^n b^n$$

$a \neq 0$ とする。このとき、指数が 0 や負の整数の場合にも、上の指数法則が成り立つように、 a の累乗の意味を定めよう。

指数法則 1 が、整数の指数について成り立つとすると、例えば

$$m=3, n=0 \text{ のとき } a^3 a^0 = a^{3+0} = a^3 \quad \text{ゆえに } a^0 = 1$$

$$m=3, n=-3 \text{ のとき } a^3 a^{-3} = a^{3+(-3)} = a^0 = 1 \quad \text{ゆえに } a^{-3} = \frac{1}{a^3}$$

0 や負の整数を指数とする累乗を定義すると、 $a \neq 0, b \neq 0$ のとき、指数法則 1 ~ 3 は、 m, n が整数のときにも成り立つ。例えば $m=5, n=-2$ の場合について、指数法則 1 ~ 3 が成り立つことが、次のように確かめられる。

$$1 \quad a^5 a^{-2} = a^5 \times \frac{1}{a^2} = \frac{a^5}{a^2} = a^3 = a^{5+(-2)}$$

$$2 \quad (a^5)^{-2} = \frac{1}{(a^5)^2} = \frac{1}{a^{5 \times 2}} = a^{-(5 \times 2)} = a^{5 \times (-2)}$$

$$3 \quad (ab)^{-2} = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{a^2 b^2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{b^2} = a^{-2} b^{-2}$$

a にあたるものを「底(てい)」
 m や n を指数と呼ぶ。
つまり「底 指数」

また、指数法則 1 を用いると

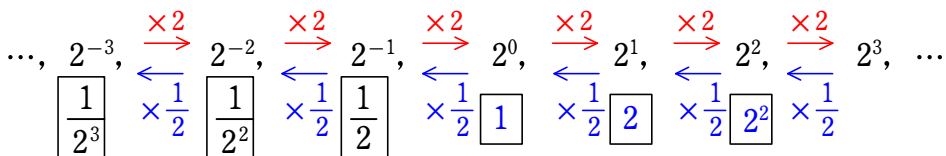
$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

更に、指数法則 3 と 2 を用いると

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (ab^{-1})^n = a^n (b^{-1})^n = a^n b^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$$

特に指数が 0 や負の整数である場合

底は 2 以外でも成り立つ話



指数が有理数の場合にも、次の指数法則が成り立つ。

指数法則 (指数が整数)

実数でも成り立つが
証明は大学数学で

$a > 0, b > 0$ で、 m, n は整数とする。

$$\begin{aligned} 1 \quad a^m \times a^n &= a^{m+n} & 1' \quad \frac{a^m}{a^n} &= a^m \div a^n = a^{m-n} \\ 2 \quad (a^m)^n &= a^{m \times n} & 3 \quad (ab)^n &= a^n b^n \leftarrow n \text{ 乗を分配する} \\ & & 3' \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

累乗 \Leftarrow 掛け算 \Leftarrow 足し算
割り算 \Leftarrow 引き算
計算順序と指数法則は共通

$a \neq 0$ で、 n は正の整数とする。

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{とくに} \quad a^{-1} = \frac{1}{a}$$

指数のマイナスは分数の横線

分数からマイナス乗にもできるように

- 例 1)** (1) $5^0 = 1$ $\leftarrow 0$ 乗は何でも「1」に
(2) $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ \leftarrow マイナス乗は「逆数」に

教科書では 0^0 は定義されない。
(1 と定義される場合が多いが
一方で定義されないこともある)

問 1) 次の式を計算せよ。

- (1) $a^{-4} a^5 = a^{-4+5} = a^1 = a$ (2) $(a^{-2})^{-3} = a^{(-2) \times (-3)} = a^6$
(3) $(a^{-1} b)^2 = (a^{-1})^2 b^2$ \leftarrow まず指数を分配
 $= a^{-2} b^2$ \leftarrow 累乗は掛け算に
 $\left(= \frac{b^2}{a^2} \right)$ \leftarrow マイナス乗は分数 (逆数) に

別解 $(a^{-1} b)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2} (= a^{-2} b^2)$

(4) $a^2 \div a^5 = a^{2-5} = a^{-3} \left(= \frac{1}{a^3} \right)$

累乗 \Leftarrow 掛け算 \Leftarrow 足し算
割り算 \Leftarrow 引き算
計算順序と指数法則は共通

証明 公式 1 の証明

(ア) m が正の整数, n が負の整数の場合

$$n = -n' (n' > 0) \text{ とおくと } a^m a^n = a^m a^{-n'} = a^m \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}}$$

(i) $m > n'$ のとき $\frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'} = a^{m+(-n')} = a^{m+n}$

(ii) $m = n'$ のとき $\frac{a^m}{a^{n'}} = 1 = a^0 = a^{m-n'} = a^{m+n}$

(iii) $m < n'$ のとき $\frac{a^m}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'-m} a^m} = \frac{1}{a^{n'-m}} = a^{-(n'-m)} = a^{m-n'} = a^{m+n}$

(i)~(iii) から、常に $a^m a^n = a^{m+n}$

(イ) m が負の整数, n が正の整数の場合 $m = -m' (m' > 0)$ とおくと(ア)と同様にして証明できる

(ウ) m, n ともに負の整数の場合 $m = -m', n = -n' (m' > 0, n' > 0)$ とおくと

$$a^m a^n = a^{-m'} a^{-n'} = \frac{1}{a^{m'}} \cdot \frac{1}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-(m'+n')} = a^{-m'-n'} = a^{m+n}$$