指数関数と対数関数【指数の拡張】 p.164～165

青チャートⅡ：例題169

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】指数法則を使いこなせるようになろう

□指数の拡張

a の累乗 a^n については，指数 n が正の整数の場合を学んでいる。ここでは，指数の範囲を整数，有理数，実数と順に拡張していこう。

指数　n 個

$$a^n = \underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n\text{個}}$$

○0 や負の整数の指数

m，n を正の整数とするとき，次の指数法則が成り立つことは，既に数学Ⅰで学んでいる。

1　$a^m a^n = a^{m+n}$　　2　$(a^m)^n = a^{mn}$　　3　$(ab)^n = a^n b^n$

$a \fallingdotseq 0$ とする。このとき，指数が 0 や負の整数の場合にも，上の指数法則が成り立つように，a の累乗の意味を定めよう。

指数法則 1 が，整数の指数について成り立つとすると，例えば

$m=3$，$n=0$ のとき　$a^3a^0 = a^{3+0} = a^3$　　ゆえに　$a^0 = 1$

$m=3$，$n=-3$ のとき　$a^3a^{-3} = a^{3+(-3)} = a^0 = 1$　ゆえに　$a^{-3} = \dfrac{1}{a^3}$

0 や負の整数を指数とする累乗を定義すると，$a \fallingdotseq 0$，$b \fallingdotseq 0$ のとき，指数法則 1 ～ 3 は，m，n が整数のときにも成り立つ。例えば $m=5$，$n=-2$ の場合について，指数法則 1 ～ 3 が成り立つことが，次のように確かめられる。

1　$a^5a^{-2} = a^5 \times \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^5}{a^2} = a^3 = a^{5+(-2)}$

2　$(a^5)^{-2} = \dfrac{1}{(a^5)^2} = \dfrac{1}{a^{5\times2}} = a^{-(5\times2)} = a^{5\times(-2)}$

3　$(ab)^{-2} = \dfrac{1}{(ab)^2} = \dfrac{1}{a^2b^2} = \dfrac{1}{a^2}\times\dfrac{1}{b^2} = a^{-2}b^{-2}$

a にあたるものを「底（てい）」
m や n を指数と呼ぶ。
つまり「 底^{指数} 」

また，指数法則 1 を用いると

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

更に，指数法則 3 と 2 を用いると

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = (ab^{-1})^n = a^n(b^{-1})^n = a^nb^{-n} = \frac{a^n}{b^n}$$

特に指数が 0 や負の整数である場合

底は 2 以外でも成り立つ話

$$\cdots,\ \underset{\boxed{\frac{1}{2^3}}}{2^{-3}},\ \underset{\times\frac{1}{2}}{\overset{\times2}{\rightleftarrows}}\ \underset{\boxed{\frac{1}{2^2}}}{2^{-2}},\ \underset{\times\frac{1}{2}}{\overset{\times2}{\rightleftarrows}}\ \underset{\boxed{\frac{1}{2}}}{2^{-1}},\ \underset{\times\frac{1}{2}}{\overset{\times2}{\rightleftarrows}}\ \underset{\boxed{1}}{2^0},\ \underset{\times\frac{1}{2}}{\overset{\times2}{\rightleftarrows}}\ \underset{\boxed{2}}{2^1},\ \underset{\times\frac{1}{2}}{\overset{\times2}{\rightleftarrows}}\ \underset{\boxed{2^2}}{2^2},\ \underset{\times\frac{1}{2}}{\overset{\times2}{\rightleftarrows}}\ 2^3,\ \cdots$$

指数関数と対数関数【指数の拡張】 p.164～165

青チャートⅡ：例題169

指数が有理数の場合にも，次の指数法則が成り立つ。

累乗 ⇄ 掛け算 ⇄ 足し算
割り算 ⇄ 引き算
計算順序と指数法則は共通

指数法則（指数が整数）

実数でも成り立つが
証明は大学数学で

$a>0$，$b>0$ で，m，n は整数とする。

1　$a^m \times a^n = a^{m+n}$　　1′　$\dfrac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n}$

2　$(a^m)^n = a^{m\times n}$　　3　$(ab)^n = a^n b^n$　← n 乗を分配する

3′　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

$a \fallingdotseq 0$ で，n は正の整数とする。

$a^0 = 1$，　$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$　　とくに　$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

指数のマイナスは分数の横線

分数からマイナス乗にもできるように

例１）　(1)　$5^0 = 1$　←０乗は何でも「１」に

(2)　$2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$　←マイナス乗は「逆数」に

教科書では 0^0 は定義されない。
（1と定義される場合が多いが
一方で定義されないこともある）

問１） 次の式を計算せよ。

(1)　$a^{-4}a^5 = a^{-4+5} = a^1 = a$

(2)　$(a^{-2})^{-3} = a^{(-2)\times(-3)} = a^6$

(3)　$(a^{-1}b)^2 = (a^{-1})^2 b^2$　←まず指数を分配

$= a^{-2}b^2$　←累乗は掛け算に

$\left(= \dfrac{b^2}{a^2}\right)$　←マイナス乗は分数（逆数）に

別解　$(a^{-1}b)^2 = \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$　$(= a^{-2}b^2)$

(4)　$a^2 \div a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$　$\left(= \dfrac{1}{a^3}\right)$

累乗 ⇄ 掛け算 ⇄ 足し算
割り算 ⇄ 引き算
計算順序と指数法則は共通

証明　公式１の証明

（ア）　m が正の整数，n が負の整数の場合

$n = -n'\,(n'>0)$ とおくと　$a^m a^n = a^m a^{-n'} = a^m \cdot \dfrac{1}{a^{n'}} = \dfrac{a^m}{a^{n'}}$

（ⅰ）　$m > n'$ のとき　$\dfrac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'} = a^{m+(-n')} = a^{m+n}$

（ⅱ）　$m = n'$ のとき　$\dfrac{a^m}{a^{n'}} = 1 = a^0 = a^{m-n'} = a^{m+n}$

（ⅲ）　$m < n'$ のとき　$\dfrac{a^m}{a^{n'}} = \dfrac{a^m}{a^{n'-m}a^m} = \dfrac{1}{a^{n'-m}} = a^{-(n'-m)} = a^{m-n'} = a^{m+n}$

（ⅰ）～（ⅲ）から，常に　$a^m a^n = a^{m+n}$

（イ）　m が負の整数，n が正の整数の場合　$m = -m'$ $(m'>0)$ とおくと（ア）と同様にして証明できる

（ウ）　m，n ともに負の整数の場合　$m = -m'$，$n = -n'$ $(m'>0,\ n'>0)$ とおくと

$a^m a^n = a^{-m'}a^{-n'} = \dfrac{1}{a^{m'}} \cdot \dfrac{1}{a^{n'}} = \dfrac{1}{a^{m'+n'}} = a^{-(m'+n')} = a^{-m'-n'} = a^{m+n}$