

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】累乗根を理解して使いこなそう。指数法則で累乗根を攻略しよう。

□累乗根

n を正の整数とすると、 n 乗すると a になる

数、すなわち $x^n = a$ となる数 x を、

a の n 乗根 という。例えば

$2^4 = 16, (-2)^4 = 16$ であるから、
2 と -2 は 16 の 4 乗根

$(-3)^5 = -243$ であるから、
 -3 は -243 の 5 乗根

である

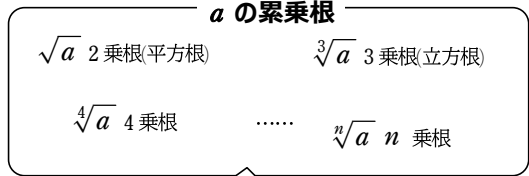
正の数 a の n 乗根のうち、正であるものについて考える。

右の図からわかるように、正の数 a に対して、 $x^n = a$ を満たす

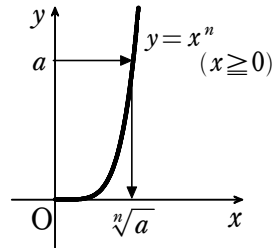
正の数 x がただ 1 つ定まる。これを $\sqrt[n]{a}$ で表す。

また、 $\sqrt[n]{0} = 0$ である。

正の n 乗根 (負の n 乗根もある)



まとめて累乗根という



注意 $\sqrt[n]{a}$ は「 n 乗根 a 」と読む。また、 $\sqrt[2]{a}$ はこれまで通り \sqrt{a} で表す。

$a > 0$ のとき	$\sqrt[n]{a} > 0,$	$(\sqrt[n]{a})^n = a,$	$\sqrt[n]{a^n} = a$	$\sqrt[n]{0} = 0$
-------------	--------------------	------------------------	---------------------	-------------------

$a > 0$ のとき、 $\sqrt[n]{a}$ は次の 2 つの条件を満たすただ 1 つの数である。

$$(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad \sqrt[n]{a} > 0$$

このことから、累乗根について次の性質が導かれる。

累乗根の性質 $a > 0, b > 0$ で、 m, n, p が正の整数のとき

1 $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$	2 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$	1. 2. は、同じ n 乗根のときにしか使えない!
3 $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	

証明 $\sqrt[n]{a}$ は n 乗すると a になる正の数である

1 $A = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ とおくと

$$A^n = (\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$$

ここで、 $\sqrt[n]{a} > 0, \sqrt[n]{b} > 0$ から $A > 0$ であるから、

A は ab の正の n 乗根である。

よって $A = \sqrt[n]{ab}$ すなわち $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

2 $A = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ とおくと

$$A^n = \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$$

ここで、 $\sqrt[n]{a} > 0, \sqrt[n]{b} > 0$ から $A > 0$ であるから、

A は $\frac{a}{b}$ の正の n 乗根である。

よって $A = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ すなわち $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

3 $A = (\sqrt[n]{a})^m$ とおくと $A^n = \{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$

ここで、 $\sqrt[n]{a} > 0$, $\sqrt[n]{b} > 0$ から $A > 0$ であるから、 A は a^m の正の n 乗根である。

よって $A = \sqrt[n]{a^m}$ すなわち $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

【深める】累乗根の性質1を用いて証明すると

$$(\sqrt[n]{a})^m = \underbrace{\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{a} \cdots \sqrt[n]{a}}_{\sqrt[n]{a} \text{ が } m \text{ 個}} = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{a \text{ が } m \text{ 個}}} = \sqrt[n]{a^m}$$

4 $A = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$ とおくと $A^{mn} = (\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = \{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

ここで、 $\sqrt[n]{a} > 0$ から $A > 0$ であるから、 A は a の正の mn 乗根である。

よって $A = \sqrt[mn]{a}$ すなわち $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5 $A = \sqrt[n]{a^m}$ とおくと $A^{np} = (\sqrt[n]{a^m})^{np} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$

ここで、 $a^m > 0$ より $A > 0$ であるから、 A は a^{mp} の正の np 乗根である。

よって $A = \sqrt[np]{a^{mp}}$ すなわち $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$

例) (1) $2^3 = 8$ であるから、2 は 8 の 3 乗根である。

(2) $3^4 = (-3)^4 = 81$ であるから、3 と -3 は 81 の 4 乗根である。

$\square^n = \bigcirc$

\square は \bigcirc の n 乗根

$\triangle = (\bigcirc)^\blacksquare$ と書けたら、「 \bigcirc は \triangle の \blacksquare 乗根」と言うことができる

81 の 4 乗根 $\rightarrow x^4 = 81$ の解 \rightarrow 実数の範囲では ± 3 (複素数の範囲では $\pm 3, \pm 3i$)

例) ※ $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = 2\sqrt{2}$ ~ 平方根 (2 乗根) は 2 個セットで外に出るので...

(1) $2^3 = 8$ であるから $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot 2} = 2$ ← 3 乗根は 3 個セットで外へ

(2) $3^4 = 81$ であるから $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = 3$ ← 4 乗根は 4 個セットで外へ

$\sqrt[4]{81} \rightarrow$ 81 の 4 乗根のうち正の実数のもの $\rightarrow 3$

例 3) (1) $\sqrt[3]{6} \sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{6 \times 12} = \sqrt[3]{2^3 \times 3^2} = \sqrt[3]{2^3} \sqrt[3]{3^2} = 2\sqrt[3]{9}$

同じ 3 乗根なので

まとめられる

(1') $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ 累乗根をまとめる

(2) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = 2 \times \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

(3) $\sqrt[6]{27} = \sqrt[6]{3^3} = 2 \times \sqrt[3]{3^{1 \times 3}} = \sqrt{3}$ 累乗根と指数で約分

ex) $(\sqrt[3]{6})^4 = \sqrt[3]{6^4} = 6\sqrt[3]{6}$ 指数は中に入れることができる

□有理数の指数

指数が有理数の場合の累乗の意味を、次のように定める。

$a > 0$ で、 m, n は正の整数、 r は正の有理数とする。

$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$,

$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$

分数の指数(分母) \leftrightarrow 累乗根

マイナスの指数 \leftrightarrow 逆数

【注意】間違えやすい所

特に $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$,

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ である。

累乗 \leftrightarrow 掛け算 \leftrightarrow 足し算
割り算 \leftrightarrow 引き算

※ 累乗計算は指数に統一を図るほうが処理しやすくなることが多い（根号の法則で解けなくもないが…）

※ 指数計算は「底」をそろえることがポイント（同じ底でないと処理できない）

指数
底

上のように指数が有理数である累乗を定めると、指数法則 1 ~ 3 は、指数が有理数のときにもそのまま成り立つ。

指数法則
 $a > 0, b > 0$ で、 r, s が有理数のとき

1	$a^r a^s = a^{r+s}$	2	$(a^r)^s = a^{rs}$	3	$(ab)^r = a^r b^r$
1'	$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$			3'	$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$

$a > 0, b > 0$ のとき、例えば $r = \frac{2}{3}, s = \frac{1}{2}$ の場合について、
 指数法則 1, 2, 3 が成り立つことが、次のようにして確かめられる。

1 $a^r a^s = a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{a^2} \sqrt{a} = \sqrt[6]{a^4} \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[6]{a^7}, a^{r+s} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{a^7}$

2 $(a^r)^s = (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{(\sqrt[3]{a})^2} = \sqrt[3]{a}, a^{rs} = a^{\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

3 $(ab)^r = (ab)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(ab)^2} = \sqrt[3]{a^2 b^2} = \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b^2}, a^r b^r = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} \sqrt[3]{b^2}$

例4) (1) $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$ または $27^{\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{3 \times \frac{2}{3}} = 3^2 = 9$

(2) $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2}$ または $8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{3 \times (-\frac{1}{3})} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

例) (1) $5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}} = 5^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} = 5^2 = 25$ (2) $(4^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{3} \times \frac{3}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2^1 = 2$

例5) 次の式を計算せよ。

(1) $(a^{\frac{1}{2}})^3 \times a^{\frac{1}{4}} \div a$

$= a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \div a^1$ ← 累乗を指数の×に

$= a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times \frac{1}{a^1}$ ← ÷を×に

$= a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{-1}$ ← 分数を指数の一へ

$= a^{\frac{3}{2} + \frac{1}{4} - 1}$ ← 累乗根を指数に

$= a^{\frac{6}{4} + \frac{1}{4} - \frac{4}{4}}$ ← 指数の通分

$= a^{\frac{3}{4}}$

(2) $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{625}$

$= \sqrt[3]{5} \times \sqrt[6]{5^4}$ ← 625を素因数分解

$= 5^{\frac{1}{3}} \times (5^4)^{\frac{1}{6}}$ ← 累乗根を指数に

$= 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{4 \times \frac{1}{6}}$ ← 累乗を指数の×に

$= 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{2}{3}}$

$= 5^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}}$ ← ×を指数の+-に

$= 5^1$

$= 5$

□無理数の指数

指数が無理数のときにも、累乗の意味を定めることができる。

例えば、 $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ に対して、

累乗の列 $3^1, 3^{1.4}, 3^{1.41}, 3^{1.414}, 3^{1.4142}, \dots$ は、右のようになり、次第に一定の値に近づいていく。その一定の値を $3^{\sqrt{2}}$ と定める。

このようにして、 $a > 0$ のとき、実数 x に対して a^x の値が定められる。

指数法則は、指数が実数のときにもそのまま成り立つ。

$$\begin{aligned} 3^1 &= 3 \\ 3^{1.4} &= 4.655536\dots \\ 3^{1.41} &= 4.706965\dots \\ 3^{1.414} &= 4.727695\dots \\ 3^{1.4142} &= 4.728733\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

研究 負の数の n 乗根

n が正の奇数のときは、負の数 a に対して、 $x^n = a$ を満たす実数 x がただ1つある。

この数 x も $\sqrt[n]{a}$ で表す。

たとえば $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

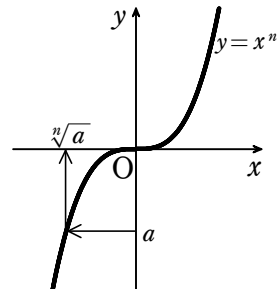
$$\sqrt[5]{-1} = \sqrt[5]{(-1)^5} = -1$$

n が正の偶数のときは、常に $x^n \geq 0$ であるから、負の数 a に対して、 $x^n = a$ を満たす実数 x は存在しない。

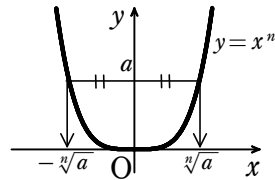
たとえば $x^4 = -2$ としたくても

$$x^4 \geq 0, \quad -2 < 0 \text{ であるから矛盾してしまう。}$$

n は正の奇数



n は正の偶数



【以下は興味のある人向けです】

教科書外の話となるが、一般的には m と n が互いに4以上の偶数のときは

$\sqrt[n]{(\text{負の数})^m}$ は許されていない。($n=2$ のときは虚数にできるので除外)

なぜかという $\sqrt[n]{(\text{負の数})^m}$ が多価 (一つの値に対して複数の値をとるもの) であるからである。

たとえば $\sqrt[4]{-2}$ は4乗して -2 になる数なので、 $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ (複号任意) と4つあるが

どれが $\sqrt[4]{-2}$ であるか定めることはできない。そのため多価であることを認めると

$$\sqrt[4]{-2} = (-2)^{\frac{1}{4}} = \begin{cases} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \end{cases} \text{ となってしまう。}$$