指数関数と対数関数【指数関数】 p.170～172

青チャートⅡ：例題 171～172

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】指数関数のグラフの概形を把握しよう

□指数関数のグラフ

$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ とするとき，$y=a^x$ は x の関数である。

関数 $y=a^x$ を，a を **底** とする x の **指数関数**（exponential function） という。

2 を底とする指数関数 $y=2^x$ と $\frac{1}{2}$ を底とする指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフについて考えてみよう。

例えば，$x=0$，-0.5，1.5 のときの 2^x の値は，次のようになる。

$$2^0=1,\quad 2^{-0.5}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\fallingdotseq 0.71,\quad 2^{1.5}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}\fallingdotseq 2.83$$

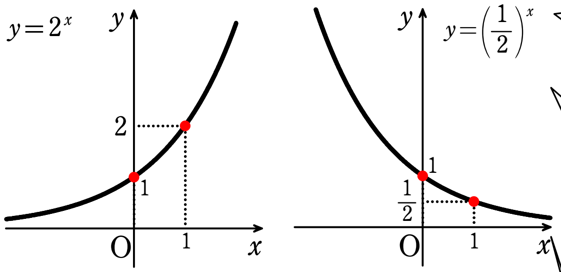
同様にして，x のいろいろな値に対する 2^x と $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ の値を求めると，右の表のようになる。

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
2^x	…	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	…
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	…	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

底が $a>1$ のときは右上がり

$(0,1)$ と $(1,2)$ の 2 点を通るように描く

x 軸は漸近線 交わってはダメ



底が $0<a<1$ のときは 右下がり なので

$(0,1)$ と $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ の 2 点を通るように描く

$(0,1)$ と $(-1, 2)$ でもＯＫ

x 軸は漸近線 交わってはダメ

1．$(0, 1)$ を打つ　2．$(1, 底)$ を打つ　3．グラフをかく

●指数関数 $y=a^x$ の性質（ポイント）

・底が $a>1$ のときは右上がりの曲線
（x の値が増加すると y の値も増加する増加関数、単調増加　$p<q \Leftrightarrow a^p<a^q$）

・底が $0<a<1$ のときは右下がりの曲線
（x の値が増加すると y の値も減少する減少関数、単調減少　$p<q \Leftrightarrow a^p>a^q$）

・点$(0, 1)$，$(1, a)$を通る（かくときはこのことを示す）

・x 軸を漸近線としてもつ曲線（交わってはいけない）

・定義域は実数全体、値域は正の数全体

$a=1$ のとき 関数 $y=a^x$ は定数関数 $y=1$ となり この場合指数関数とは言わない

注意　$a>0$，$a \fallingdotseq 1$ のとき「$p=q \iff a^p=a^q$」が成り立つ。

補足　$f(x)=a^x$ とすると　$f(x+y)=f(x)f(y)$ が成り立つ。これは指数関数を特徴付ける関数方程式で指数関数の性質の１つでもある。

指数関数と対数関数【指数関数】 p.170～172

青チャートⅡ：例題171～172

問３） 指数関数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは，$y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称であることを示せ。

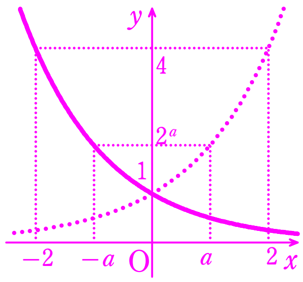
解答 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフ上の任意の点を $(a,\ b)$ とすると

$b=\left(\frac{1}{2}\right)^a=(2^{-1})^a$ すなわち $b=2^{-a}$ ……①

よって，点 $(a,\ b)$ と y 軸に関して対称な点 $(-a,\ b)$ は，

① から $y=2^x$ のグラフ上にある。

したがって，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフと y 軸に関して対称である。



補足 一般に $y=f(x)$ のグラフに対して

$y-q=f(x-p)$ …… x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したもの

$y=-f(x)$ …… x 軸に関して $y=f(x)$ のグラフと対称（縦に反転）

$y=f(-x)$ …… y 軸に関して $y=f(x)$ のグラフと対称（左右対称）

$y=-f(-x)$ …… 原点に関して $y=f(x)$ のグラフと対称

参考 凸関数

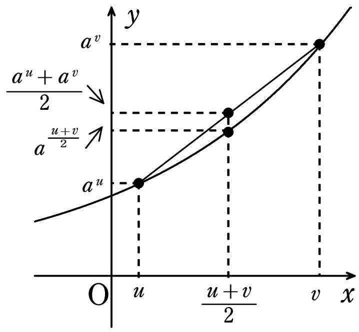
関数 $f(x)$ があり，任意の実数 u，v に対して

$$\frac{f(u)+f(v)}{2} \geqq f\left(\frac{u+v}{2}\right)$$

が成り立つとき，関数 $f(x)$ を凸関数という。

$f(x)=a^x$ とおくと，相加平均と相乗平均の大小関係により

関数 $f(x)$ は凸関数とわかる。



深める $y=3^x$ のグラフと $y=2^x$ のグラフは，$x<0$，$x>0$ の範囲において

それぞれどのような位置関係にあるかを説明しよう。

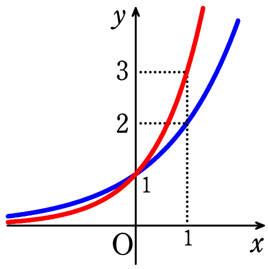
解答

$x<0$ の範囲において

$y=3^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフより下側にあり

$x>0$ の範囲において

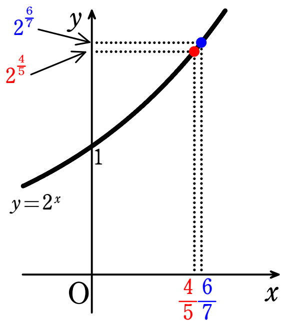
$y=3^x$ のグラフは $y=2^x$ のグラフより上側にある



指数関数と対数関数【指数関数】 p.170～172

青チャートⅡ：例題171～172

例６） $\sqrt[5]{16}$ ， $\sqrt[7]{64}$ の大小を不等号を用いて表せ。



$\sqrt[5]{16}$ ， $\sqrt[7]{64}$ を，それぞれ 2 の累乗で表すと

$$\sqrt[5]{16}=\sqrt[5]{2^4}=2^{\frac{4}{5}}=2^{\frac{28}{35}},\quad \sqrt[7]{64}=\sqrt[7]{2^6}=2^{\frac{6}{7}}=2^{\frac{30}{35}}$$

指数の大小を調べると $\dfrac{28}{35}<\dfrac{30}{35}$ であるから

関数 $y=2^x$ の底 2 は 1 より大きく

（不等号の向きは変わらないので） $2^{\frac{4}{5}}<2^{\frac{6}{7}}$

すなわち $\sqrt[5]{16}<\sqrt[7]{64}$ 　終

●大小比較のポイント

・まずは底をそろえてみる（だめなときは指数をそろえるor累乗する）

・底がそろった場合は指数の大小比較

「底が 1 より大きい」⇒大小（不等号）そのまま

「底が 1 より小さい」⇒大小（不等号）反転

※ 底を必ず 1 より大きくしてしまうのも一つの手段

4STEP数学Ⅱ 問題３４８） 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$ 　　　(2) 2^{30}，3^{20}，10^{10}

【青チャート数学Ⅱ 例題１７２類題】

このままでは底はそろわない → 指数をそろえる or 累乗する

解答

(1) 3 つの数を，それぞれ 6 乗すると

$$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8,$$

$$(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9,$$

$$(\sqrt[6]{7})^6=7$$

累乗する

$7<8<9$ であるから $(\sqrt[6]{7})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$ ゆえに $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

別解 $\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，

$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，

$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

指数をそろえる

$7<8<9$ であるから $7^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$ すなわち $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2) $2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$，

$3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

指数をそろえる

$8<9<10$ であるから $8^{10}<9^{10}<10^{10}$ すなわち $2^{30}<3^{20}<10^{10}$