指数関数と対数関数【方程式・不等式】 p.172～173

青チャートⅡ：例題173～174

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】「1次方程式のとき」、「2次方程式のとき」で解き方を区別しよう

例題1＋α） 次の方程式を解け。【指数方程式】

(1)　$2^x=4096$　　(2)　$9^x=27$　　(3)　$9^x=3^{x+1}$

解答

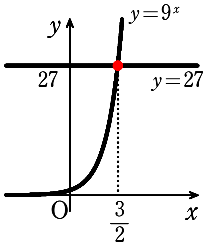
(1)　$2^x=2^{12}$

$x=12$

(2)　$3^{2x}=3^3$

$2x=3$

$x=\dfrac{3}{2}$



(3)　$9^x=3^{x+1}$

$(3^2)^x=3^{x+1}$

$3^{2x}=3^{x+1}$

$2x=x+1$ より

$\therefore\ x=1$

●方程式のポイント
- まずは底をそろえて ○$^{\triangle}$＝○$^{\square}$ の形に
- 後は指数に注目して △＝□ の方程式に

応用例題1） 次の方程式を解け。

(1)　$4^x-2^{x+1}-8=0$

(ア)　$2^x=t$ とおいて得られる t の方程式を作れ。(イ)　与えられた x の方程式を解け。

解答 (ア)　方程式を変形すると

$$(2^x)^2-2\cdot2^x-8=0$$

$4^x=(2^2)^x$
$=2^{2\times x}$
$=2^{x\times 2}$
$=(2^x)^2$

$2^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，

置き換えたら範囲の吟味

方程式は

$$t^2-2t-8=0$$

$$(t+2)(t-4)=0$$

$t>0$ であるから　　$t=4$

かけて4，たして -3
になる2数は
$+4$ と -1

(イ)　よって　　$2^x=4$

すなわち　　$2^x=2^2$

したがって　　$x=2$

●ポイント
- 置き換えて2次方程式とみて解く
- 置き換えた場合は、置き換えた文字の範囲の吟味を

指数関数と対数関数【方程式・不等式】 p.172～173

青チャートⅡ：例題173～174

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】底が１より大きいか小さいかで不等号の向きを判断して不等式を解こう

例題１＋α）次の不等式を解け。【指数不等式】

(1)　$2^x \geqq 134217728$　　(2)　$2^{x-1} \leqq 8$　　(3)　$\left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

(1)　$2^x \geqq 2^{27}$

底 2 は

1 より大きいから

$x \geqq 27$

(2)　$2^{x-1} \leqq 2^3$

底 2 は 1 より大きいから

$x-1 \leqq 3$

$\therefore\ x \leqq 4$

(3)　$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

底が１より小さいときは

不等号反転

$2x < x+1$

$\therefore\ x < 1$

別解　$\frac{1}{4} = 2^{-2}$，$\frac{1}{2} = 2^{-1}$ より

$(2^{-2})^x > (2^{-1})^{x+1}$

$2^{-2x} > 2^{-x-1}$

底 2 は 1 より大きいから

$-2x > -x-1$

$-x > -1$

$x < 1$

負の数を

掛けたり割ったりしたら

不等号反転

●不等式のポイント

・まずは底をそろえる！⇒後は指数で不等式だが…

「底が１より大きい」⇒大小（不等号）そのまま

「底が１より小さい」⇒大小（不等号）反転

※ 底を必ず１より大きくしてしまうのも一つの手段

応用例題１）(2)　$9^x - 8 \cdot 3^x - 9 > 0$ を解け。

(ア)　$3^x = t$ とおいて得られる t の不等式を解け。　(イ)　与えられた x の不等式を解け。

解答　(ア)　不等式を変形すると　　$(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 > 0$

$9^x = (3^2)^x$

$= 3^{2\times x}$

$= 3^{x\times 2}$

$= (3^x)^2$

$3^x = t$ とおくと　$t > 0$ であり，

置き換えたら範囲の吟味

不等式は　　$t^2 - 8t - 9 > 0$

$(t+1)(t-9) > 0$

$t+1 > 0$ であるから　$t-9 > 0$

$\therefore\quad t > 9$

$t < -1$，$9 < t$

$t > 0$ なので　　$t > 9$

２次不等式は…

＜なら「ふくは内」

２つの解の内側

＞なら

２つの解の外側

(イ)　$t = 3^x$ であり　$t = 3^x > 0$ なので　　$3^x > 9$

$3^x > 3^2$

底 3 は 1 より大きいので

$x > 2$

●ポイント

・置き換えて２次不等式とみて解く……（ア）

・もとに戻したら底の大きさに注意して不等式を解く！……（イ）

指数関数と対数関数【方程式・不等式】 p.172〜173

青チャートⅡ：例題173〜174

補充問題） $a^{2x}=3$ のとき，$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}$ の値を求めよ。

解答 $$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^{x}+a^{-x}}=\frac{(a^{x})^3+(a^{-x})^3}{a^{x}+a^{-x}}$$

$$=\frac{(a^{x}+a^{-x})\{(a^{x})^2-a^{x}\cdot a^{-x}+(a^{-x})^2\}}{a^{x}+a^{-x}}$$

$$=a^{2x}-1+\frac{1}{a^{2x}}=3-1+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

4STEP数学Ⅱ 例題３４） 連立方程式 $\begin{cases}5^x-5^y=4\cdot5^2\\5^{x+y}=5^5\end{cases}$ を解け。

指数が違うので別な文字でおく
→ 置き換えたら範囲の吟味

解答 $5^x=X$，$5^y=Y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$

また，連立方程式は $\begin{cases}X-Y=4\cdot5^2 & \cdots\cdots ①\\XY=5^5 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

和 $X+Y$ と積 $X\cdot Y$ なら
２次方程式を立てて解く流れも

① から　$Y=X-4\cdot5^2$　…… ③

これを ② に代入して整理すると　$X^2-4\cdot5^2X-5^5=0$

１文字消去

よって　$(X+5^2)(X-5^3)=0$

$X+5^2>0$ であるから　$X-5^3=0$

ゆえに　$X=5^3$　すなわち　$5^x=5^3$　　よって　$x=3$

③ から，$X=5^3$ のとき　$Y=5^3-4\cdot5^2=5^2$ (これは $Y>0$ を満たす)

すなわち　$5^y=5^2$　したがって　$y=2$

以上から　$x=3$，$y=2$

指数関数と対数関数【方程式・不等式】 p.172～173

青チャートⅡ：例題173～174

例題）

(ア) $2^x-2^{-x}=X$ とおくとき，4^x+4^{-x}，8^x-8^{-x} をそれぞれ X で表せ．

(イ) (ア)の結果を利用して，方程式

$(2^{3x+3}-2^{-3x+3})-9(2^{2x+1}+2^{-2x+1})-69(2^x-2^{-x})+36=0$ を満たす実数 x の値を求めよ．

【立命館大】

解答

対称式

(ア) $4^x+4^{-x}=(2^x-2^{-x})^2+2=X^2+2$ 答

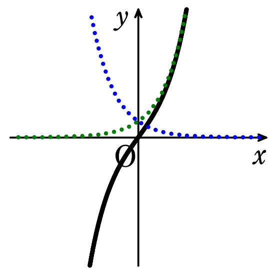
$8^x-8^{-x}=(2^x)^3-(2^{-x})^3=(2^x-2^{-x})(4^x+4^{-x}+1)=X(X^2+2+1)=X^3+3X$ 答

(イ) $(2^{3x+3}-2^{-3x+3})-9(2^{2x+1}+2^{-2x+1})-69(2^x-2^{-x})+36=0$ から

$8(2^{3x}-2^{-3x})-18(4^x+4^{-x})-69(2^x-2^{-x})+36=0$

$2^x-2^{-x}=X$ とおくと，

$X=2^x-2^{-x}$ はすべての実数をとる



(1)により

$8(X^3+3X)-18(X^2+2)-69X+36=0$ から

$8X^3-18X^2-45X=0$

よって　$X(2X+3)(4X-15)=0$

ゆえに　$X=0,\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{15}{4}$

[1] $X=0$ のとき　$2^x-2^{-x}=0$ から　$2^{2x}-1=0$

$\therefore$　$2^{2x}=1=2^0$　よって　$2x=0$

ゆえに　$x=0$

[2] $X=-\dfrac{3}{2}$ のとき　$2^x-2^{-x}=-\dfrac{3}{2}$ から　$2\cdot 2^{2x}+3\cdot 2^x-2=0$

よって　$(2^x+2)(2\cdot 2^x-1)=0$　　$2^x+2>0$ であるから　$2^x=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$

ゆえに　$x=-1$

[3] $X=\dfrac{15}{4}$ のとき　$2^x-2^{-x}=\dfrac{15}{4}$ から　$4\cdot 2^{2x}-15\cdot 2^x-4=0$

よって　$(2^x-4)(4\cdot 2^x+1)=0$

$4\cdot 2^x+1>0$ であるから　$2^x=4=2^2$　　ゆえに　$x=2$

以上から　$x=-1,0,2$ 答