指数関数と対数関数【対数とその性質】 p.175～177

青チャートⅡ：例題 176

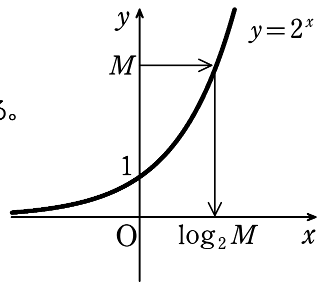
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】対数の仕組みを理解して処理できるようになろう

$2^x=4$ を満たす実数 x は $x=2$ であるが，$2^x=3$ を満たす実数 x の値はどのようになるだろうか。指数関数 $y=2^x$ は常に増加する関数で，値域は正の数全体であるから，$2^x=3$ を満たす実数 x はただ 1 つ定まる。ここでは，任意の正の数 M に対して，$a^p=M$ を満たす実数 p の値を求めることを考えよう。

□対数

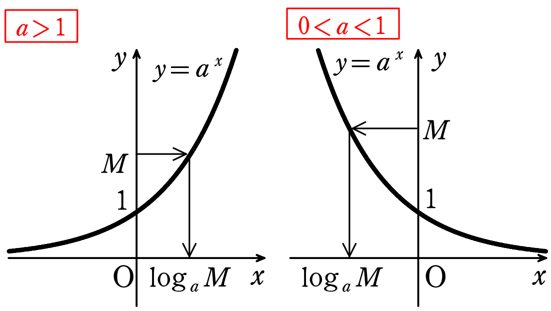
指数関数 $y=2^x$ は増加関数で，値域は正の数全体であるから，どんな正の数 M に対しても，$M=2^x$ となる実数 x がただ 1 つ定まる。この x を $\log_2 M$ で表す。



一般に，指数関数 $y=a^x$ のグラフからわかるように， $a>0$，$a\neq1$ とするとき，任意の正の数 M に対して $a^p=M$ を満たす実数 p が，ただ 1 つ定まる。

この p を $\log_a M$ で表し，a を 底 とする M の **対数** という。

また，$\log_a M$ における<u>正の数</u> M を，この対数の **真数** という。



※ 対数の真数は，指数の計算をした結果なので正の数である

指数		対数
$\boxed{底}^{\text{指数}} = \boxed{?}$	⇔	$\boxed{底}^{?} = \boxed{真数}$ → $\log_{\boxed{底}}\boxed{真数} = ?$

※ log は対数を意味するlogarithmの略である

●ポイント

- $a^p=M \iff \log_a M=p$ ただし $a>0,\ a\neq1,\ M>0$
- $\log_{\bigcirc}\square^{\triangle}=\triangle\times\log_{\bigcirc}\square$ 特に$\log_{\bigcirc}\bigcirc^{\triangle}=\triangle$

  $a^0=1,\ a^1=a$ なので
  - $\log_{\bigcirc}1=0$（○を何乗したら 1 になるか⟹ 0 乗）
  - $\log_{\bigcirc}\bigcirc=1$（○を何乗したら○になるか⟹ 1 乗）

$(底)^{(指数)}=(真数)$

⇕

$\log_{(底)}(真数)=(指数)$

例 7） (1) $3^2=9$ から $\log_3 9=2$

「3 を 2 乗すると 9 」から「3 は何乗すると 9 になるか」

たいすうはかいすう

(2) $2^{-1}=\dfrac{1}{2}$ から $\log_2\dfrac{1}{2}=-1$

「2 を -1 乗すると $\dfrac{1}{2}$ 」から「2 は何乗すると $\dfrac{1}{2}$ になるか」

指数関数と対数関数【対数とその性質】　p.175～177

青チャートⅡ：例題176

対数の性質

$a>0$，$a \fallingdotseq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k が実数のとき

1　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

2　$\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

3　$\log_a M^k = k\log_a M$　　k は実数

これらの等式を用いると，右辺の形を左辺の形に変形することもできる。

累乗 ⇄ × ⇄ ＋

÷ ⇄ －

証明　$\log_a M = p$，$\log_a N = q$ とすると　$M = a^p$，$N = a^q$

【１の証明】 指数法則により　$MN = a^p a^q = a^{p+q}$

対数の記号を使って書き直すと　$\log_a MN = p+q$

すなわち　$\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　終

【２の証明】 $\dfrac{M}{N} = \dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ より　$\log_a \dfrac{M}{N} = p - q = \log_a M - \log_a N$

【３の証明】 $M^k = (a^p)^k = a^{pk}$ より　$\log_a M^k = pk$

したがって　$\log_a M^k = k\log_a M$　終

また，性質２，３の特別な場合として，次のことが成り立つ。

$M=1$ のとき　$\log_a \dfrac{1}{N} = \log_a 1 - \log_a N = 0 - \log_a N = -\log_a N$

$\log_a \sqrt[n]{M} = \log_a M^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\log_a M$

よって　$\log_a \dfrac{1}{N} = -\log_a N$，　$\log_a \sqrt[n]{M} = \dfrac{1}{n}\log_a M$

例８＋α） (1)　$\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1} = -1$

(3)　$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

$\log_{\bigcirc} \square^{\triangle} = \triangle \cdot \log_{\bigcirc} \square$　　特に $\log_{\bigcirc} \bigcirc^{\triangle} = \triangle$

累乗は掛け算に

例 9 ＋α）

(1) $\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}(2\times5)$ 　足し算は掛け算に

$=\log_{10}10=1$ 　ポイントより

累乗⇔掛け算⇔足し算

割り算⇔引き算

この関係性は計算の順番や指数法則と同じ

(2) $\log_2 24-\log_2 3=\log_2\dfrac{24}{3}$ 　引き算は割り算に

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$ 　ポイントより

(3) $4\log_2\sqrt{3}-\log_2 18=\log_2(\sqrt{3})^4-\log_2 18$ 　掛け算は累乗に

係数がある状態だと足し算引き算の処理はできないので注意

$=\log_2\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^4-\log_2 18$

$=\log_2 3^2-\log_2 18$

$=\log_2\dfrac{9}{18}$ 　引き算は割り算に

$=\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$ 　ポイントより　終

別解　例 9 (1) は，次のようにに計算することもできる。

$$\log_{10}2+\log_{10}5=\log_{10}2+\log_{10}\frac{10}{2}$$

$$=\log_{10}2+(\log_{10}10-\log_{10}2)=1$$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}$

$=\log_{10}10-\log_{10}2$

$=1-\log_{10}2$

の変形はよく使われる

別解　例 9 (3) は，次のようにに計算することもできる。

$$4\log_2\sqrt{3}-\log_2 18=4\cdot\frac{1}{2}\log_2 3-\log_2(2\cdot3^2)$$

$$=2\log_2 3-(1+2\log_2 3)=-1$$