指数関数と対数関数【底の変換公式等】　p.178

青チャートⅡ：例題 177~179

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】底の変換公式を理解して処理できるようになろう

□底の変換公式

●底の変換公式のポイント

・$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　（a, b, c は正の数で，$a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$）

$\log_{\bigcirc} \triangle = \dfrac{\log_{\blacksquare} \triangle}{\log_{\blacksquare} \bigcirc}$　新たな底をすえて，分子に真数、分母に底

・特に　$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$　（a, b, c は正の数で，$a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$）

例１０） 次の値を求めよ。

ヒント　都合の良さそうな底を持ってくる

(1)　$\log_8 16$ の値は

$$\log_8 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^4}{\log_2 2^3} = \frac{4\log_2 2}{3\log_2 2} = \frac{4}{3}$$

(2)　$\log_3 4 \cdot \log_4 9$ の値は

約分のイメージが付きにくい人は $\dfrac{\log_3 4}{1} \times \dfrac{\log_3 9}{\log_3 4}$ と考えよう

底 3 にすると　$\log_3 4 \cdot \log_4 9 = \log_3 4 \times \dfrac{\log_3 9}{\log_3 4} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

底 4 にすると　$\log_3 4 \cdot \log_4 9 = \dfrac{\log_4 4}{\log_4 3} \times \log_4 3^2 = \dfrac{1}{\log_4 3} \times 2\log_4 3 = 2$

底 10 にすると　$\log_3 4 \cdot \log_4 9 = \dfrac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \times \dfrac{\log_{10} 3^2}{\log_{10} 4} = \dfrac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \times \dfrac{2\log_{10} 3}{\log_{10} 4} = 2$

※基本的には同じ値になる。やりやすそうな方で行うようにしよう。

問４）　次の等式を証明せよ。

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$$

証明

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \log_a b \cdot \frac{\log_a c}{\log_a b} \cdot \frac{\log_a a}{\log_a c} = \log_a a = 1$$

（底は a でなくても良い）

追加）知っていると割と使える処理（使わなくても構いません）

$\log_{a^m} b^n = \dfrac{n}{m} \log_a b$

特に　$\log_{a^n} b^n = \log_a b$

(1)　$\log_{5^2} \sqrt{5^3} = \dfrac{\log_5 5^{\frac{3}{2}}}{\log_5 5^2} = \dfrac{\frac{3}{2}\log_5 5}{2\log_5 5} = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3}{2}\times 2}{2\times 2} = \dfrac{3}{4}$

$\log_{5^2} \sqrt{5^3} \xrightarrow{\text{2乗}} = \log_{5^4} 5^3 = \dfrac{\log_5 5^3}{\log_5 5^4} = \dfrac{3}{4}$ と処理することもできる

(2) $\log_2 3\cdot\log_3 4=\dfrac{\log_2 3}{1}\cdot\dfrac{\log_2 2^2}{\log_2 3}=\dfrac{\log_2 3}{1}\cdot\dfrac{2\log_2 2}{\log_2 3}=2$

$\log_{\bigcirc}\triangle\times\log_{\triangle}\bigcirc=\log_{\bigcirc}\bigcirc=1$ を用いると楽

$\log_2 3\cdot\log_3 4=\log_2 3\cdot\log_3 2^2=\log_2 3\cdot 2\log_3 2=2\cdot\boxed{\log_2 3\cdot\log_3 2}=2$ とできる

(3) $9^{\log_3 5}$ の値を求めよ【青チャート数学Ⅱ基本例題１７９類題】

$9^{\log_3 5}=M$ とおく。 左辺は正であるから、両辺の 3 を底とする対数をとると

$\log_3 9^{\log_3 5}=\log_3 M$ ゆえに $\log_3 5\times\log_3 3^2=\log_3 M$

したがって $2\log_3 5=\log_3 M$ よって $M=5^2$

したがって $9^{\log_3 5}=25$

一般化すると， $M=a^{\log_a b}$ において

a を底とする両辺の対数をとると

$\log_a M=\log_a a^{\log_a b}$

$\log_a M=\log_a b\cdot\log_a a$

$\log_a M=\log_a b$

$\therefore\ M=b$

したがって $a>0,\ b>0,\ a\neq 1$ のとき $\boldsymbol{a^{\log_a b}=b}$

これは対数の定義 $a^p=M$ に

$p=\log_a M$ を代入することからも

得られる

つまり **底**$^{\log_{\text{底}}\text{真数}}$ **の底がそろったとき真数部分と等しくなる**といえる

別解 $\boxed{a^{\log_a b}=b}$ を用いて

$(3^2)^{\log_3 5}=(3^{\log_3 5})^2=5^2$

としてもよい。

4STEP数学Ⅱ 問題３５９）

$a=\log_2 3$，$b=\log_2 5$ とするとき，次の式を a，b で表せ。

(1) $\log_2 15$　　(2) $\log_2 75$　　(3) $\log_4 45$

【青チャート数学Ⅱ基本例題１７８類題】

与えられた対数の真数で表せるように

設問の真数を変形しよう

解答

(1) $\log_2 15=\log_2(3\times5)=\log_2 3+\log_2 5=a+b$

(2) $\log_2 75=\log_2(3\times5^2)=\log_2 3+2\log_2 5=a+2b$

(3) $\log_4 45=\dfrac{\log_2(3^2\times5)}{\log_2 4}=\dfrac{2\log_2 3+\log_2 5}{2}=\dfrac{2a+b}{2}=a+\dfrac{b}{2}$