指数関数と対数関数【対数関数】 p.179～181

青チャートⅡ：例題 180～181

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】対数関数のグラフの概形を押さえよう。底に注意して大小判断をしよう。

□対数関数とそのグラフ

a を 1 と異なる正の定数 $(a>0,\ a\neq 1)$ とするとき，$y=\log_a x$ は x の関数である。

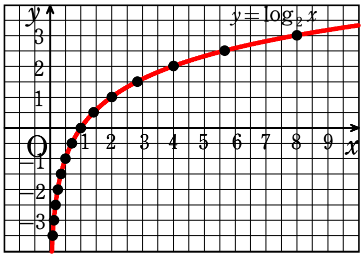
この関数を，a を **底** とする x の **対数関数**（logarithmic function） という。

2 を底とする対数関数 $y=\log_2 x$ のグラフを調べてみよう。

$y=\log_2 x$ は $x=2^y$ と同じである。そこで，$y=2^x$ の対応表で x と y を入れかえると，次の対応表が得られる。

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	4
y	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2

この表の x，y を座標にもつ点 $(x,\ y)$ は，右の図のような曲線上にある。 この曲線が，対数関数 $y=\log_2 x$ …… ① のグラフである。このグラフは，指数関数 $y=2^x$ …… ② のグラフと，直線 $y=x$ に関して対称である。



このことは，次の 1，2 から説明できる。

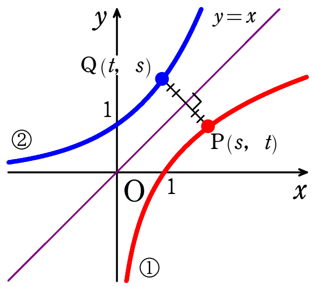
1． t は実数で，$s>0$ のとき

「$t=\log_2 s \iff s=2^t$」が成り立つ。

よって，① のグラフ上に点 P$(s,\ t)$ があれば，

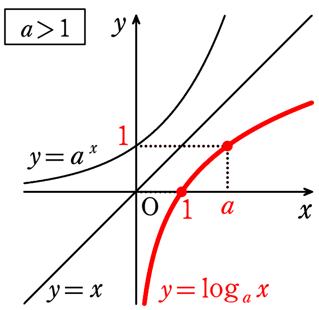
② のグラフ上に点 Q$(t,\ s)$ がある。この逆も成り立つ。

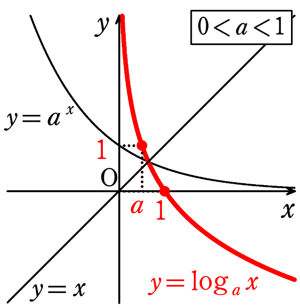
2． 点 P$(s,\ t)$ と点 Q$(t,\ s)$ は，直線 $y=x$ に関して対称である。



一般に，対数関数 $y=\log_a x$ のグラフは，指数関数 $y=a^x$ のグラフと直線 $y=x$ に関して対称であり，次のようになる。

このような関係を 逆関数 という（数学Ⅲの内容）





いずれの場合も，y 軸を漸近線としてもち，点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通る。

$a>1$ のとき右上がりの曲線，$0<a<1$ のとき右下がりの曲線である。

指数関数だと $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ に対応する点

対数関数

参考 片対数グラフについて http://graph.moo.jp

問５） 関数 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ のグラフは，関数 $y=\log_2 x$ のグラフと x 軸に関して対称であることを示せ。

解答 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ のグラフ上の任意の点を $(a,\ b)$ とすると

$$b=\log_{\frac{1}{2}}a=\frac{\log_2 a}{\log_2 2^{-1}}=-\log_2 a$$

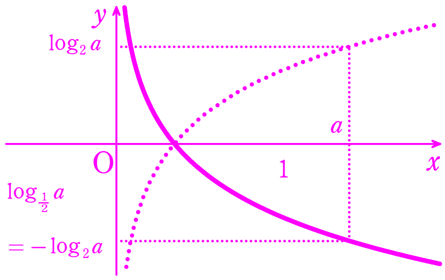
すなわち $-b=\log_2 a$ ……①

よって，点 $(a,\ b)$ と x 軸に関して対称な点 $(a,\ -b)$ は，

① から $y=\log_2 x$ のグラフ上にある。

したがって，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$ のグラフは $y=\log_2 x$ のグラフと

x 軸に関して対称である。



補足 一般に $y=f(x)$ のグラフに対して

$y-q=f(x-p)$ …… x 軸方向に p， y 軸方向に q だけ平行移動したもの

$y=-f(x)$ …… x 軸に関して $y=f(x)$ のグラフと対称（縦に反転）

$y=f(-x)$ …… y 軸に関して $y=f(x)$ のグラフと対称（左右対称）

$y=-f(-x)$ …… 原点に関して $y=f(x)$ のグラフと対称

参考 凹関数

関数 $f(x)$ があり，任意の実数 u，v に対して

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)\geqq\frac{f(u)+f(v)}{2} \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つとき，関数 $f(x)$ を凹関数という。

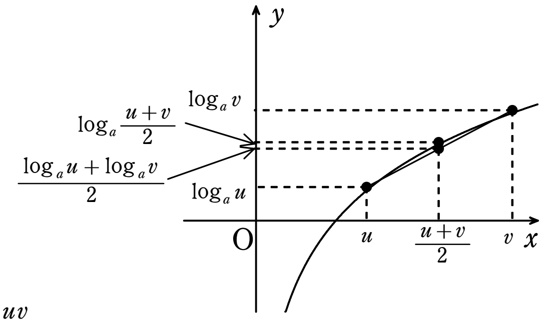
$f(x)=\log_a x$ において $a>1$ とすると，

任意の正の数 u，v に対して

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)=\log_a\frac{u+v}{2}$$

$$\frac{f(u)+f(v)}{2}=\frac{\log_a u+\log_a v}{2}=\frac{1}{2}\log_a uv$$

$$=\log_a(uv)^{\frac{1}{2}}=\log_a\sqrt{uv}$$



$u>0$，$v>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により $\dfrac{u+v}{2}\geqq\sqrt{uv}$

$a>1$ であるから $\log_a\dfrac{u+v}{2}\geqq\log_a\sqrt{uv}$ よって $f\left(\dfrac{u+v}{2}\right)\geqq\dfrac{f(u)+f(v)}{2}$

ゆえに $a>1$ のとき $f(x)=\log_a x$ は凹関数である。

なお， $0<a<1$ のときは不等号の向きが逆になるので凸関数となる。

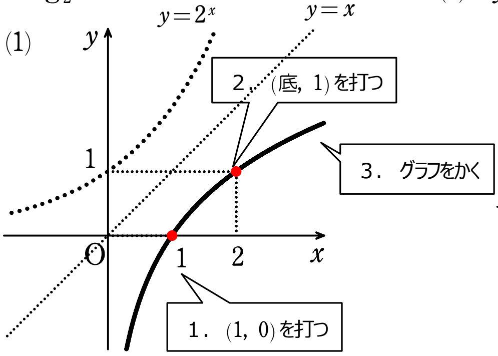
指数関数と対数関数【対数関数】 p.179～181

青チャートⅡ：例題 180～181

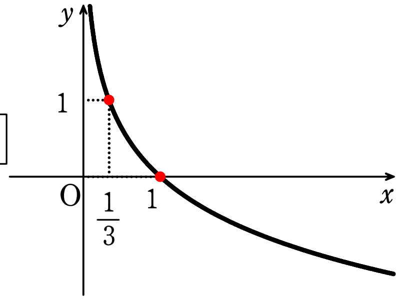
例） 次の対数関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\log_2 x$　　　　(2)　$y=\log_{\frac{1}{3}} x$　　底が１より小さいとき

解答　(1)



(2)



●対数関数 $y=\log_a x$ のポイント

- ・底が $a>1$ のときは右上がり（増加関数）
- ・底が $0<a<1$ のときは右下がり（減少関数）
- ・点 (1 , 0), (底, 1)を通ることを示す
- ・y 軸が漸近線（交わってはいけない）
- ・定義域は正の数全体、値域は実数全体

指数関数と対数関数は
逆関数の関係

□対数関数の性質

対数関数 $y=\log_a x$ の性質

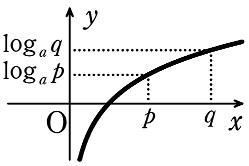
$a>1$ のとき，　x の値が増加すると y の値も増加する増加関数。単調増加。

　すなわち　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

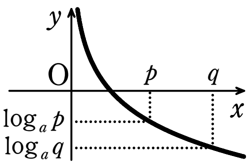
$0<a<1$ のとき，　x の値が増加すると y の値は減少する減少関数。単調減少。

　すなわち　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

$\boxed{a>1}$



$\boxed{0<a<1}$



注意　$a>0$，$a\fallingdotseq 1$，$p>0$，$q>0$ のとき，次が成り立つ。

$$p=q \iff \log_a p=\log_a q$$

補足　$f(x)=\log_a x$ とすると

$f(xy)=f(x)+f(y)$ が成り立つ。

これは対数関数を特徴付ける関数方程式で

対数関数の性質の１つでもある。

○対数関数と指数関数の対応

	対数関数 $y=\log_a x$	指数関数 $y=a^x$
定義域	$x>0$ (真数は正)	$\mathbb{R}$ (実数全体)
値　域	$\mathbb{R}$ (実数全体)	$y>0$ (値は正)
$a>1$ のとき	増加する	増加する
$0<a<1$ のとき	減少する	減少する
グラフ上の特別な点	(1，0)，(a，1)	(0，1)，(1，a)
漸近線	y 軸 ($x=0$)	x 軸 ($y=0$)

指数関数と対数関数【対数関数】 p.179～181

青チャートⅡ：例題 180～181

例題２） $\log_2 3$，$\log_4 5$，$\log_{16} 36$ の大小を不等号を用いて表せ。

解答　対数の底を 2 にそろえると

$$\log_4 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 4} = \frac{\log_2 5}{\log_2 2^2} = \frac{1}{2}\log_2 5 = \log_2 \sqrt{5}$$

$$\log_{16} 36 = \frac{\log_2 36}{\log_2 16} = \frac{\log_2 6^2}{\log_2 2^4} = \frac{2\log_2 6}{4\log_2 2} = \frac{1}{2}\log_2 6 = \log_2 \sqrt{6}$$

底 2 は 1 より大きく，$\sqrt{5} < \sqrt{6} < 3 = \sqrt{9}$ であるから

$$\log_2 \sqrt{5} < \log_2 \sqrt{6} < \log_2 3$$

すなわち　$\log_4 5 < \log_{16} 36 < \log_2 3$

別解　$\log_2 3 = p$, $\log_4 5 = q$, $\log_{16} 36 = r$ とおくと

$2^p = 3$ …… ①，$4^q = 5$ …… ②，$16^r = 36$ …… ③

① から $(2^p)^4 = 3^4$　すなわち　$16^p = 81$ …… ①′

② から $(4^q)^2 = 4^2$　すなわち　$16^q = 16$ …… ②′

底 16 は 1 より大きいので　$16 < 36 < 81$ と ①′，②′，③ から

$16^q < 16^r < 16^p$ より $q < r < p$　したがって　$\log_4 5 < \log_{16} 36 < \log_2 3$

例題） 次の 各組の数を小さい方から順に並べよ。

(1)　$2\log_5 3$，$3\log_5 2$

解答　$2\log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9$

$3\log_5 2 = \log_5 2^3 = \log_5 8$

底 5 は 1 より大きいから

$\log_5 8 < \log_5 9$

すなわち　$3\log_5 2 < 2\log_5 3$

(2)　$\log_{0.5} 5$ ，$\log_{0.5} 0.1$ ，$\log_{0.5} 2$

解答　$0.1 < 2 < 5$

底 0.5 は 1 より小さいから　不等号反転

$\log_{0.5} 0.1 > \log_{0.5} 2 > \log_{0.5} 5$

すなわち

$\log_{0.5} 5 < \log_{0.5} 2 < \log_{0.5} 0.1$

●大小比較のポイント

・まずは底をそろえてみる

・底がそろった場合は真数の大小比較

「底が 1 より大きい」⇒大小（不等号）そのまま

「底が 1 より小さい」⇒大小（不等号）反転

※ 底の変換公式で底を必ず 1 より大きくしてしまうのも一つの手段