指数関数と対数関数【方程式・不等式】 p.181～182

青チャートⅡ：例題182～185

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】対数関数を含む方程式の解き方をマスターしよう

●方程式のポイント

- **まずは必ず真数条件の吟味を**
- $\log_{(底)}$(**真数**)＝(**指数**)**の形の方程式は対数の定義から解いてしまってＯＫ**

それ以外は…

- **底をそろえて** $\boxed{\log_{\bigcirc}\triangle=\log_{\bigcirc}\square}$ **の形…**$(*)$**に**
- $(*)$**の形の方程式は真数で方程式を作る**

$\log_{(底)}$(真数)＝(指数)

⇕

(真数)＝(底)$^{(指数)}$

(底)＞0 より (真数)＞0が成り立つ

例題３） 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_2 x=3$

解答　（底 2，真数 x，指数 3 であるから）

対数の定義から　$x=2^3$

$\therefore\ x=8$

この形の方程式のみ

$\log_{(底)}$(**真数**)＝(**指数**)

⇕

(**真数**)＝(**底**)$^{(指数)}$ **で解くことができる**

応用例題２） 方程式 $\log_2 x+\log_2(x-7)=3$ を解け。

すなわち　$x>7$

解答　真数は正であるから　$x>0$ かつ $x-7>0$

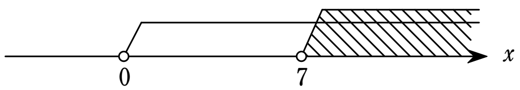
よって　$x>0$ かつ $x>7$

すなわち　$x>7$

まずは必ず式変形をする前に

(**真数**)＞**0** として

範囲の条件を確認する



方程式を変形すると

$\log_2 x(x-7)=3$

よって

$x(x-7)=2^3$

$\log_{(底)}$(**真数**)＝(**指数**)

の形なので

(**真数**)＝(**底**)$^{(指数)}$ **へ**

整理して　$x^2-7x-8=0$

すなわち　$(x+1)(x-8)=0$

$x>7$ であるから，解は

$x=8$

別解　与式は

$\log_2 x+\log_2(x-7)=3$

$\log_2 x+\log_2(x-7)=3\times1$

$1=\log_{\bigcirc}\bigcirc$

方程式を変形すると

$\log_2 x(x-7)=3\times\log_2 2$

$\log_2 x(x-7)=\log_2 2^3$

よって　$x(x-7)=2^3$

底がそろったら

真数のみの式を作る

$x^2-7x=8$

$x^2-7x-8=0$

$(x+1)(x-8)=0$

$x>7$ なので　$x=8$

深める　方程式 $\log_2 x(x-7)=3$ の解が応用例題２の方程式の解と同じになるかどうかを確かめよう。

解答　対数の定義から　$x(x-7)=2^3$

整理して　$x^2-7x-8=0$

すなわち　$(x-8)(x-1)=0$

よって　$x=-1,\ 8$

したがって，応用例題２の方程式の解と同じにならない

例） 次の方程式を解け。

(1) $\log_4(2x+3)+\log_4(4x+1)=2\log_4 5$

(2) $\log_2(3-x)=\log_4(2x+18)$

解答 (1) 真数は正であるから　$2x+3>0$ かつ $4x+1>0$

よって　$x>-\dfrac{1}{4}$ …… ①

方程式を変形すると

$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 5^2$　すなわち　$\log_4(2x+3)(4x+1)=\log_4 25$

ゆえに　$(2x+3)(4x+1)=25$　整理して　$4x^2+7x-11=0$

すなわち　$(x-1)(4x+11)=0$

① から，解は　$x=1$

(2) 真数は正であるから　$3-x>0$ かつ $2x+18>0$

よって　$-9<x<3$ …… ①

方程式を変形すると

$$\log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4}$$

すなわち　$\log_2(3-x)=\dfrac{\log_2(2x+18)}{2}$

両辺に 2 を掛けて　$2\log_2(3-x)=\log_2(2x+18)$

すなわち　$\log_2(3-x)^2=\log_2(2x+18)$

ゆえに　$(3-x)^2=2x+18$

整理して　$x^2-8x-9=0$

すなわち　$(x+1)(x-9)=0$

① から，解は　$x=-1$

底を 4 にそろえて
$\log_{2^2}(3-x)^2=\log_4(2x+18)$
より
$\log_4(3-x)^2=\log_4(2x+18)$
としてもよい

補足 $\log_2 ●^2 = 2\log_2 ●$ と変形してよいのは $● > 0$ のときだけ

対数の性質 $\log_a M^k = k\log_a M$ は $M>0$ のもとで成り立つから

$● > 0$ のとき のみ $\log_2 ●^2 = 2\log_2 ●$ が成り立つ

$● < 0$ のとき は $\log_2 ●^2 = \log_2(-●)^2 = 2\log_2(-●)$ が成り立つ

よって●の符号を考慮せずに，安易に変形してはいけないことに注意をしよう

なお $● \fallingdotseq 0$ に対して， $\log_2 ●^2 = 2\log_2|●|$ が成り立つことになる。

4STEP数学Ⅱ 例題３６）次の方程式を解け。

(1) $2^x = 3^{x-1}$ (2) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 = 0$

解答 (1) 方程式の両辺は正であるから，2 を底とする対数をとると

$x = (x-1)\log_2 3$ よって $(\log_2 3 - 1)x = \log_2 3$

$\log_2 3 - 1 \fallingdotseq 0$ であるから $x = \dfrac{\log_2 3}{\log_2 3 - 1}$

$\left(3 \text{ を底とする対数をとると } x = \dfrac{1}{1-\log_3 2}\right)$

(2) 真数は正であるから $x>0$ かつ $x^4>0$ すなわち $x>0$ …… ①

方程式を変形すると $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x = 0$

$\log_3 x = t$ とおくと $t^2 - 4t = 0$

よって $t(t-4) = 0$ ゆえに $t = 0,\ 4$

すなわち $\log_3 x = 0,\ 4$ したがって $x = 1,\ 81$

これらは ① を満たす。

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】底が１より大きいか小さいかで不等号の向きを判断して不等式を解こう

●不等式のポイント

・**まずは必ず真数条件の吟味を！**

・**底をそろえて** $\boxed{\log_{\bigcirc} \triangle < \log_{\bigcirc} \square}$ **などの形…(∗)に**

・(∗)の形の不等式は、次のことに注意して真数で不等式を作る

「底が１より大きい」⇒大小（不等号）そのまま

「底が１より小さい」⇒大小（不等号）反転

※ 底を必ず１より大きくしてしまうのも一つの手段

例題３） 次の方程式，不等式を解け。

(2) $\log_2 x < 3$

まずは必ず式変形をする前に

(**真数**)＞0 として範囲の条件を確認する

解答 真数は正であるから $x>0$ …… ①

不等式を変形すると $\log_2 x < 3\times 1$

$1=\log_{\bigcirc}\bigcirc$

$\log_2 x < 3\times\log_2 2$

掛け算は累乗に

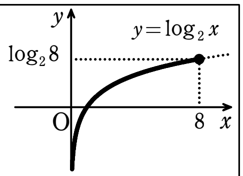
与えられた不等式は $\log_2 x < \log_2 2^3$

すなわち $\log_2 x < \log_2 8$

底がそろったら真数のみの式を作る

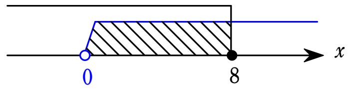
底 2 は 1 より大きいから（不等号の向きは変わらず，）

単調増加なので



$x<8$ …… ②

①，② の共通範囲を求めて



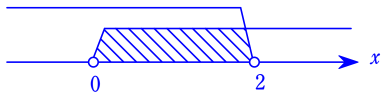
$0<x<8$

応用例題３） 不等式 $2\log_2(2-x)\geqq\log_2 x$ を解け。

解答 真数は正であるから $2-x>0$ かつ $x>0$

$-x>-2$ に -1 を掛けて $x<2$

すなわち $0<x<2$ …… ①



与えられた不等式は $\log_2(2-x)^2\geqq\log_2 x$ より

書き加える

底 2 は 1 より大きいから（不等号の向きは変わらず）

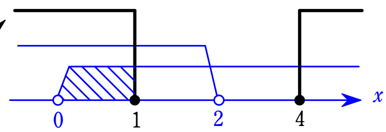
$(2-x)^2\geqq x$

整理して $x^2-4x+4\geqq x$

$x^2-5x+4\geqq 0$

すなわち $(x-1)(x-4)\geqq 0$

これを解いて $x\leqq 1,\ 4\leqq x$ …… ②



①，② の共通範囲を求めて，解は $0<x\leqq 1$

4STEP数学Ⅱ 問題３７６） (3) $(\log_3 x)^2-\log_9 x^2-2\leqq 0$ を解け。

解答 真数は正であるから $x>0$ …… ①

不等式を変形すると $(\log_3 x)^2-\dfrac{\log_3 x^2}{\log_3 9}-2\leqq 0$ より $(\log_3 x)^2-\dfrac{2\log_3 x}{2}-2\leqq 0$

すなわち $(\log_3 x)^2-\log_3 x-2\leqq 0$

$\log_3 x=t$ とおくと $t^2-t-2\leqq 0$ よって $(t+1)(t-2)\leqq 0$

これを解いて $-1\leqq t\leqq 2$ ゆえに $-1\leqq\log_3 x\leqq 2$

すなわち $\log_3\dfrac{1}{3}\leqq\log_3 x\leqq\log_3 9$ 底 3 は 1 より大きいから $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$ …… ②

①，② から，解は $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$