指数関数と対数関数【関数】　p.183

青チャートⅡ：例題186～187

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】対数関数を含む関数の解き方をマスターしよう

□対数関数を含む関数の最大値，最小値

●最大・最小のポイント

・１次式の形であれば、底の値で最大・最小の場所は決まる

「底が１より大きい」⇒　単調増加　⇒　x の大小関係と同じ

「底が１より小さい」⇒　単調減少　⇒　x の大小関係と反転

・２次式の形であれば、置き換えて**２次関数とみる**

置き換えたら必ず範囲の吟味を行う

例題：１次式のケース） 関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$　$(3\leqq x\leqq 9)$ の最大値，最小値を求めよ。

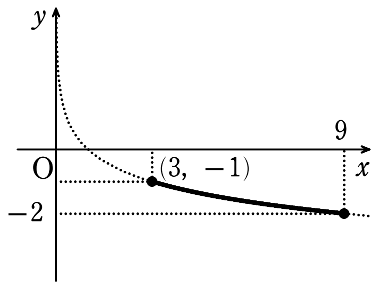
解答　底 $\dfrac{1}{3}$ は１より小さいから，x の値が増加すると y の値は減少する単調減少。

よって，関数 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ $(3\leqq x\leqq 9)$ は

$3\leqq x\leqq 9$ より $\log_{\frac{1}{3}}3\geqq\log_{\frac{1}{3}}x\geqq\log_{\frac{1}{3}}9$

$x=3$ で最大値 $\log_{\frac{1}{3}}3=-1$

$x=9$　で最小値 $\log_{\frac{1}{3}}9=-2$



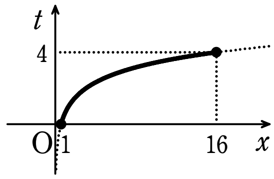
応用例題４：２次式のケース）

次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$$y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-3 \quad (1\leqq x\leqq 16)$$

考え方 … $\log_2 x=t$ とおくと，$y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-3$ の右辺は，t の２次式で表される。t のとる値の範囲に注意する。

解答 $\log_2 x=t$ とおく。 置き換えたら範囲の吟味



$\log_2 x$ の底 2 は 1 より大きいから，$1\leqq x\leqq 16$ のとき

$$\log_2 1\leqq \log_2 x\leqq \log_2 16$$

すなわち　$0\leqq t\leqq 4$ …… ①　定義域に

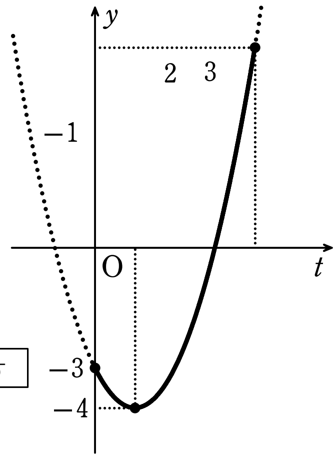
与えられた関数の式を変形すると

$$y=(\log_2 x)^2-2\log_2 x-3$$

よって，y を t で表すと

$$y=t^2-2t-3$$
$$=(t-1)^2-4$$

２次関数の活用



① の範囲において，y は

$t=4$ で最大値 5 をとり，

$t=1$ で最小値 -4 をとる。

$t=4$ のとき $\log_2 x=4$ 　ゆえに $x=2^4=16$

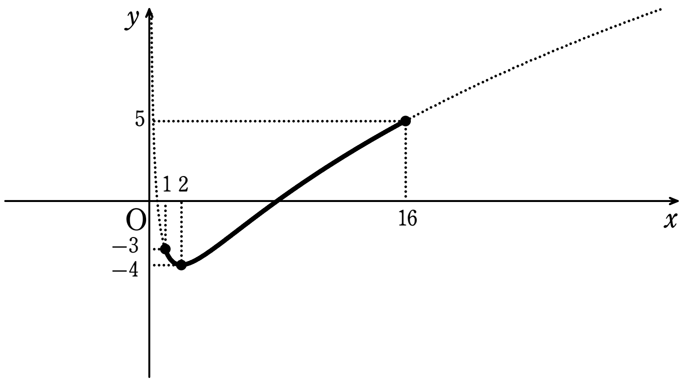
$t=1$ のとき $\log_2 x=1$ 　ゆえに $x=2^1=2$

t から x に戻す

したがって，この関数は

$x=16$ で最大値 5 をとり，$x=2$ で最小値 -4 をとる。

補足 $y=(\log_2 x)^2-\log_2 x^2-3$ $(1\leqq x\leqq 16)$ をそのままグラフにすると複雑な形となるが，置き換えを行うことで既知の関数として扱うことができる



上の２次関数のグラフと比べると，増減のタイミングは変わらない

指数関数と対数関数【関数】 p.183

青チャートⅡ：例題186～187

例題） 関数 $f(x)=\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}\right)\left(\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{9}{x}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2}{81}$ の $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$ における最大値，最小値，

およびそのときの x の値をそれぞれ求めよ。

【宮崎大】

解答 $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}=\log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}9=\log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{3}}x+2$

底を 3 にしてもよい

$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{9}{x}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{9}\right)^{-1}=-\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}=-\log_{\frac{1}{3}}x-2$

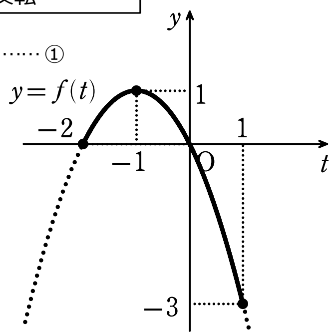
$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2}{81}=\log_{\frac{1}{3}}x^2-\log_{\frac{1}{3}}3^4=2\log_{\frac{1}{3}}x-\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}=2\log_{\frac{1}{3}}x+4$

であるから，$\log_{\frac{1}{3}}x=t$ とおき，$f(x)$ を t の式で表すと

底が 1 より小さいので
大小反転

$f(x)=(t+2)(-t-2)+2t+4=-t^2-2t=-(t+1)^2+1$

また $\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq 9$ であるから $\log_{\frac{1}{3}}9\leqq t\leqq\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}$ すなわち $-2\leqq t\leqq 1$ ……①



① の範囲において，$f(x)$ は $t=-1$ で最大値 1，$t=1$ で最小値 -3 をとる。

$t=-1$ のとき $\log_{\frac{1}{3}}x=-1$ よって $x=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-1}=3$

$t=1$ のとき $\log_{\frac{1}{3}}x=1$ よって $x=\dfrac{1}{3}$

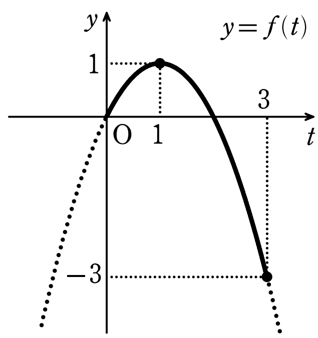
したがって，関数 $f(x)$ は $x=3$ で最大値 1，$x=\dfrac{1}{3}$ で最小値 -3 をとる。

別解 $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{9}{x}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{9}\right)^{-1}=-\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}$， $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x^2}{81}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{x}{9}\right)^{2}=2\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}$

であるから，$\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}=t$ とおき，$f(x)$ を t の式で表すと $f(x)=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

底が 1 より小さいので
大小反転

また $\dfrac{1}{27}\leqq\dfrac{x}{9}\leqq 1$ であるから $\log_{\frac{1}{3}}1\leqq t\leqq\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}$ すなわち $0\leqq t\leqq 3$ ……①



① の範囲において，$f(x)$ は

$t=1$ で最大値 1，$t=3$ で最小値 -3

をとる。

$t=1$ のとき $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}=1$ よって $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}$

ゆえに $\dfrac{x}{9}=\dfrac{1}{3}$ すなわち $x=3$

$t=3$ のとき $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}=3$ よって $\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{9}=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}$

ゆえに $\dfrac{x}{9}=\dfrac{1}{27}$ すなわち $x=\dfrac{1}{3}$

したがって，関数 $f(x)$ は $x=3$ で最大値 1，$x=\dfrac{1}{3}$ で最小値 -3 をとる。

※何を置き換えるかや，底が 1 より大きいか小さいかで式の形が変わるが、答えは変わらない。
解きやすさなどを考えて選択をしよう

4STEP数学Ⅱ 問題３８３）

$x>0$，$y>0$，$x+2y=8$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。

解答

$x+2y=8$ から　$x=8-2y$ …… ①

$x>0$ から　$8-2y>0$　よって　$y<4$

$y>0$ と合わせて　$0<y<4$ …… ②

底 10 より単調増加となるから
真数が最大のとき
もとの対数も最大になることに目を付ける

$$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy=\log_{10}(8-2y)y$$
$$=\log_{10}(-2y^2+8y)$$
$$=\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}$$

2 変数は
1 変数にしてみる

関数 $b=-2(y-2)^2+8$ は，② の範囲で

真数部分に注目する

$y=2$ で最大値 8

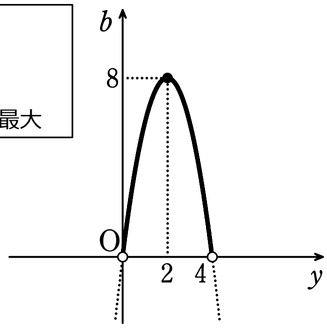
をとる。

底 10 は 1 より大きいから，このとき

真数は $y=2$ のとき最大
単調増加なので
もとの対数も $y=2$ のとき最大

$\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}$ も最大で，その最大値は

$$\log_{10}8=3\log_{10}2$$



また，① から，$y=2$ のとき　$x=4$

よって，$\log_{10}x+\log_{10}y$ は

$x=4$，$y=2$ で最大値 $3\log_{10}2$

をとる。

別解　$\log_{10}x+\log_{10}y=\log_{10}xy$

底 10 は 1 より大きいから，xy が最大となるとき，$\log_{10}xy$ は最大となる。

底 10 より単調増加
なので xy の最大値が
わかれば良い

$x>0$，$2y>0$ であるから，相加平均と相乗平均の大小関係により

$$x+2y\geqq 2\sqrt{x\cdot 2y}=2\sqrt{2xy}$$

等号が成り立つのは，$x=2y$ のときである。

$x+2y=8$ であるから　$8\geqq 2\sqrt{2xy}$　ゆえに　$\sqrt{xy}\leqq 2\sqrt{2}$

両辺は正であるから　$xy\leqq 8$

等号が成り立つのは，$x=2y$，$x+2y=8$ から

$$x=4,\ y=2$$

よって，xy は $x=4$，$y=2$ で最大値 8 をとる。

したがって，$\log_{10}x+\log_{10}y$ は

$x=4$，$y=2$ で最大値 $\log_{10}8$ すなわち $3\log_{10}2$ をとる。