指数関数と対数関数【常用対数の応用】　p.185～187　青チャートⅡ：例題 188～191

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】底が10である常用対数を上手く活用して値を求めよう

□常用対数の応用

正の数 N の整数部分の桁数と常用対数 $\log_{10}N$ の値の関係を調べよう。

たとえば，正の数 N の整数部分が 3 桁であるとは，N が

$$100 \leqq N < 1000 \quad \text{すなわち} \quad 10^2 \leqq N < 10^3$$

を満たすということである。各辺の常用対数をとると，

$$\log_{10}10^2 \leqq \log_{10}N < \log_{10}10^3 \quad \text{すなわち} \quad 2 \leqq \log_{10}N < 3$$

指数で桁数が読み取れる

⇩

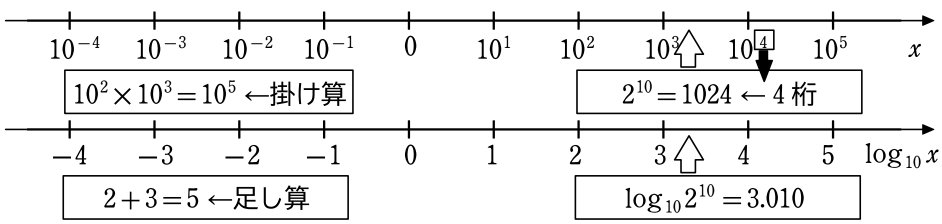
$\log_{10}N$ の値を調べればよい

逆に，正の数 N が $2 \leqq \log_{10}N < 3$ を満たすならば，

上の計算を逆にたどって　$10^2 \leqq N < 10^3$

ゆえに，N の整数部分は 3 桁の数である。

●基本的な桁数問題のポイント



・常用対数を用いると足し算や小さな値の大小関係で考えることができる！

例題４）　3^{20} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}3 = 0.4771$ とする。

解答　$\log_{10}3^{20} = 20\log_{10}3 = 20 \times 0.4771 = 9.542$

$9 < \log_{10}3^{20} < 10$ であるから

$9 = 9\log_{10}10 = \log_{10}10^9$ ，$10 = 10\log_{10}10 = \log_{10}10^{10}$

$\log_{10}10^9 < \log_{10}3^{20} < \log_{10}10^{10}$

$10^9 < 3^{20} < 10^{\boxed{10}}$

右側の指数(絶対値の大きい方)に注目

（10^9 は 0 が 9 個と 1 が 1 個で 10 桁になる）

よって，3^{20} は 10 桁の数である。終

例題）2^n が 10 桁の数となるような自然数 n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}2 = 0.3010$ とする。

考え方 … 2^n が 10 桁の数のとき，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ が成り立つ。

常用対数をとると n の 1 次不等式が得られる。

解答　2^n が 10 桁の数となるのは，$10^9 \leqq 2^n < 10^{10}$ のときである。

常用対数をとると　$\log_{10}10^9 \leqq \log_{10}2^n < \log_{10}10^{10}$

$$9 \leqq n\log_{10}2 < 10$$

$\log_{10}2 = 0.3010 > 0$ であるから　$\dfrac{9}{\log_{10}2} \leqq n < \dfrac{10}{\log_{10}2}$　…… ①

$\dfrac{9}{\log_{10}2}=\dfrac{9}{0.3010}=29.9\cdots$，$\dfrac{10}{\log_{10}2}=\dfrac{10}{0.3010}=33.2\cdots$

よって，不等式 ① を満たす自然数 n は　$n=30,\ 31,\ 32,\ 33$

発展　自然数 $N=7^{777}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，次の値を用いてよい。

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}5=0.6990$，$\log_{10}7=0.8451$

(1) N は何桁の数か。

(2) N の先頭の数字は何か。

(3) N の末尾の数字は何か。

【青チャート数学Ⅱ基本例題１９１類題】

解答

(1) $\log_{10}N=\log_{10}7^{777}=777\log_{10}7=777\times0.8451=656.6427\cdots\cdots$ ①

$656<\log_{10}N<657$ であるから　$10^{656}<N<10^{657}$　よって，N は 657 桁の数である。

(2) (1)の① から　$N=10^{656.6427}=10^{0.6427}\times10^{656}$

よって，N の最高位の数字は $10^{0.6427}$ の整数部分である。

$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$，$\log_{10}5=0.6990$ であるから　$4=10^{0.6020}$，$5=10^{0.6990}$

$10^{0.6020}<10^{0.6427}<10^{0.6990}$ であるから　$4<10^{0.6427}<5$

よって，N の先頭の数字は　4

(2)別解　(1)① から　$\log_{10}N=656+0.6427$

ここで　$\log_{10}4=2\log_{10}2=0.6020$

$\log_{10}5=0.6990$

ゆえに　$\log_{10}4<0.6427<\log_{10}5$

すなわち　$4<10^{0.6427}<5$

よって　$4\cdot10^{656}<10^{656.6427}<5\cdot10^{656}$

すなわち　$4\cdot10^{656}<7^{777}<5\cdot10^{656}$

したがって，N の先頭の数字は　4

(3) 7^1，7^2，7^3，7^4，7^5，…… の末尾の数字は順に

7，9，3，1，7，……

よって，7，9，3，1 を繰り返すことがわかる。

$777=4\times194+1$ であるから

$N=7^{4\times194+1}=(7^4)^{194}\cdot7$

$(7^4)^{194}$ の末尾の数字は 1 であるから,

N の末尾の数字は　7

小数 N と常用対数 $\log_{10}N$ の値の関係についても調べてみよう。

たとえば，N の小数第 3 位に初めて 0 でない数字が現れるとは，N が

$$0.001\leqq N<0.01$$

すなわち　$10^{-③}\leqq N<10^{-2}$

を満たすということである。常用対数をとると，次のようになる。

$$\log_{10}10^{-3}\leqq\log_{10}N<\log_{10}10^{-2}$$

すなわち　$-③\leqq\log_{10}N<-2$

指数で桁数が読み取れる

⇓

$\log_{10}N$ の値を調べればよい

練習２６） $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか。

ただし，$\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30}=30\log_{10}\frac{1}{3}$$
$$=30\log_{10}3^{-1}$$
$$=-30\log_{10}3=-14.313$$

$-15<\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}<-14$ であるから

$$\log_{10}10^{-15}<\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{30}<\log_{10}10^{-14}$$

$-15=-15\cdot\log_{10}10=\log_{10}10^{-15}$，
$-14=-14\cdot\log_{10}10=\log_{10}10^{-14}$

底 10 なので

$$10^{-\boxed{15}}<\left(\frac{1}{3}\right)^{30}<10^{-14}$$

左側の指数(絶対値の大きい方)に注目

よって，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第 15 位に初めて 0 でない数字が現れる。

補足 小数第 15 位に初めて 0 でない数字について

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}=-14.313=-15+0.687$ より $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}=10^{-15+0.687}=10^{-15}\times10^{0.687}$

したがって　$a\leqq10^{0.687}<a+1$ を満たす整数 a を見つければよい。

ここで　$\log_{10}4=\log_{10}2^2=2\log_{10}2=2\times0.3010=0.6020$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=0.6990$

ゆえに　$\log_{10}4<0.687<0.6990$　すなわち　$4<10^{0.687}<5$

よって　$4\cdot10^{-15}<10^{-15}\times10^{0.687}<5\cdot10^{-15}$

すなわち　$4\cdot10^{-15}<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{30}<5\cdot10^{-15}$

したがって小数第 15 位に出てくる初めて 0 でない数字は 4

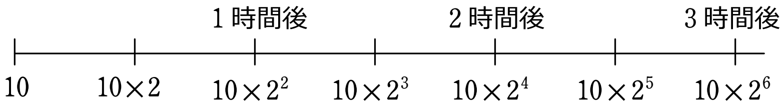
指数関数と対数関数【常用対数の応用】　p.185～187　青チャートⅡ：例題188～191

□指数不等式を満たす整数

自然現象や社会現象の中には，その生成発展や衰退の様子が，指数関数で表されるものが多い。このような現象に関する問題にも，対数が利用できる場合がある。

応用例題５） 30 分ごとに分裂して，個数が 2 倍に増えるバクテリアがある。
このバクテリア 10 個が，1 億個以上になるのは何時間後か。
ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とし，答えは整数で求めよ。

分裂イメージ



解答　x 時間後のバクテリアの個数は　10×2^{2x}

これが 1 億個以上であるとすると

$$10\times2^{2x}\geqq10^8$$

すなわち　$2^{2x}\geqq10^7$

両辺の常用対数をとると，底 10 は 1 より大きいから

$$2x\log_{10}2\geqq7$$

よって　$2\times0.3010x\geqq7$

ゆえに　$x\geqq\dfrac{7}{2\times0.3010}=11.6\cdots\cdots$

答　12 時間後

研究 対数と無理数

数学Ⅰで学んだように，有理数は，整数 m と 0 でない整数 n を用いて分数 $\dfrac{m}{n}$ の形に表される数である。また，無理数は，実数のうち有理数でないものである。この章では，$\log_{10}3$ や $\log_2 5$ などの対数を学んだが，これらの数の多くは無理数である。

$\log_{10}3$ が無理数であることを背理法を用いて証明してみよう。

> a，b が自然数で
> $a \neq 1$，$b \neq 1$ とするとき
> $\log_a b$ が有理数となるのは
> ある自然数 c，d，e が存在して
> $a = c^d$，$b = c^e$ と表すことが
> できるときに限られる

例１） $\log_{10}3$ が無理数であることを証明せよ。

証明 $\log_{10}3$ の底 10 は 1 より大きいから，$3>1$ より

$$\log_{10}3 > \log_{10}1 \qquad \text{すなわち} \qquad \log_{10}3 > 0$$

よって，$\log_{10}3$ が無理数でない，すなわち 有理数 である と仮定すると，

2 つの自然数 m，n を用いて

$$\log_{10}3 = \boxed{\dfrac{m}{n}}$$

と表される。このとき

$$10^{\frac{m}{n}} = 3$$

すなわち $10^m = 3^n$ 　仮定の下で成立した（導かれた）式

一方，m，n は自然数であるから，10^m は偶数，3^n は奇数となり，

$10^m = 3^n$ に矛盾する。 仮定が成り立たない

したがって，$\log_{10}3$ は無理数である。 終

参考 $(\sqrt{10})^{\log_{10}9}$ を計算せよ。

解答 $p = (\sqrt{10})^{\log_{10}9}$ とおいて 10 を底とする両辺の対数をとると

$$\log_{10}p = \log_{10}(\sqrt{10})^{\log_{10}9} = \log_{10}9 \cdot \log_{10}\sqrt{10} = \log_{10}3^2 \cdot \log_{10}10^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\log_{10}3 \cdot \frac{1}{2} = \log_{10}3$$

よって $p = 3$ つまり $(\sqrt{10})^{\log_{10}9} = 3$ である。

ここで，$\sqrt{10}$ は無理数である。 また，$\log_{10}9 = \log_{10}3^2 = 2\log_{10}3$ より

$\log_{10}9$ も無理数である。一方，$(\sqrt{10})^{\log_{10}9} = 3$ と有理数となることから

無理数の無理数乗が有理数になる場合がある例である。