図形と方程式【直線上の点】 p.72～74

青チャートⅡ：例題 71

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】 距離や内分・外分の考え方を理解しておこう。

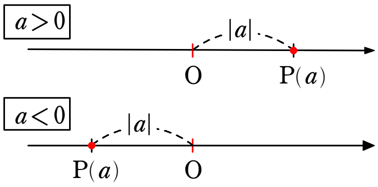
□数直線上の２点間の距離

数直線上で，点 P に実数 a が対応しているとき，a を点 P の座標といい，
座標が a である点 P を P(a) で表す。

点の名前(座標)

数直線上の**原点 O と点 P(a) の距離**を，
a の**絶対値**といい，$|a|$ で表す。すなわち，
2 点 O，P 間の距離 OP は次のように表される。

$$\mathrm{OP}=|a|$$



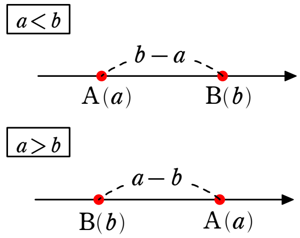
数直線上の 2 点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は

$a \leqq b$ のとき　$\mathrm{AB}=b-a$

$a>b$ のとき　$\mathrm{AB}=a-b=-(b-a)$

であるから，　$\mathrm{AB}=|b-a|$ と表される。

絶対値を使うことで
a，b の大小は関係なくなる



なぜなら，

$a \leqq b$ のとき $0 \leqq b-a$ なので

$\mathrm{AB}=|b-a|=b-a$

$a>b$ のとき $0>b-a$ なので

$\mathrm{AB}=|b-a|=-(b-a)=a-b$

<補足>　$a \geqq 0$ のとき
$|a|=a$ 中身が正ならそのまま外す
$a<0$ のとき
$|a|=-a$ 中身が負ならマイナスカッコ

例１）

(1)　2 点 A(-4)，B(5) 間の距離 AB は

$\mathrm{AB}=|5-(-4)|=|9|=9$

(2)　2 点 A(3)，B(-2) 間の距離 AB は

$\mathrm{AB}=|(-2)-3|=|-5|=5$　終

注意　(大きい方)－(小さい方) の計算をするなら絶対値を付けなくてもよいが
絶対値をつけると位置関係に関係なく求めることができる
(1)　$5-(-4)=9$　　(2)　$3-(-2)=3+2=5$

図形と方程式【直線上の点】 p.72～74

青チャートⅡ：例題 71

□線分の内分点・外分点

m，n は正の数とする。点 P が線分 AB 上にあって

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$$

PはABの間(内側)

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m:n$ に **内 分** するといい，

P を **内分点** という。 **内側で分ける点**

次に，点 Q が線分 AB の延長上にあって

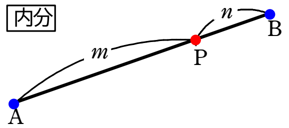
$$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=m:n$$

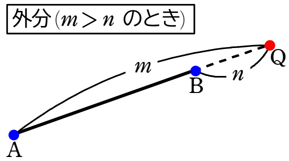
Q はABの外側

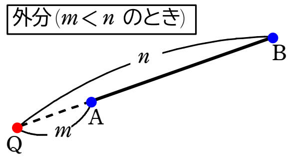
が成り立つとき，点 Q は線分 AB を $m:n$ に **外 分** するといい，

Q を **外分点** という。 **外側で分ける点**

外分では，$m \fallingdotseq n$ である。







問題文中に「点○ は線分□△を～」とあったら

「 □○：○△ 」を考える

例） 数直線上の 3 点 A (1)，B (7)，C (3) について，次の $\boxed{}$ に適する数または用語を入れよ。

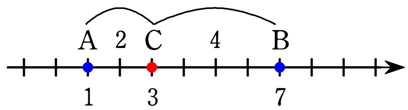
【数学A平面図形のおさらいなので、必要があれば確認しておく】

(1) 点 C は線分 AB を $\boxed{}$：$\boxed{}$ に $\boxed{}$ する。

AC＝|3－1|＝2，CB＝|7－3|＝4 より

AC：CB＝2：4＝1：2

よって，点 C は線分 AB を $\boxed{1}$：$\boxed{2}$ に $\boxed{内分}$ する。



C はAB の内側⇒**内分**

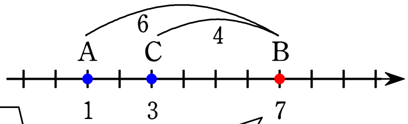
点C は線分AB を～ ⇒ AC : CB

(2) 点 B は線分 AC を $\boxed{}$：$\boxed{}$ に $\boxed{}$ する。

AB＝|7－1|＝6，BC＝|3－7|＝4 より

AB：BC＝6：4＝3：2

よって，点 B は線分 AC を $\boxed{3}$：$\boxed{2}$ に $\boxed{外分}$ する。



B はAC の外側⇒**外分**

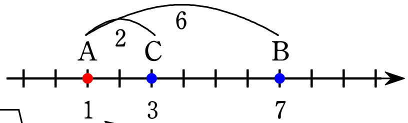
点B は線分ACを～ ⇒ AB : BC

(3) 点 A は線分 CB を $\boxed{}$：$\boxed{}$ に $\boxed{}$ する。

CA＝|1－3|＝2，AB＝|7－1|＝6 より

CA：AB＝2：6＝1：3

よって，点 A は線分 CB を $\boxed{1}$：$\boxed{3}$ に $\boxed{外分}$ する。



A はCB の外側⇒**外分**

点A は線分CBを～ ⇒ CA : AB

図形と方程式【直線上の点】 p.72～74

青チャートⅡ：例題 71

□線分の内分点・外分点の座標

数直線上の 2 点 A (a)，B (b) に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の座標 P(x) を求めてみよう。

[1] <u>$a<b$ のとき</u>　$a<x<b$ であるから

$\mathrm{AP}=x-a$，$\mathrm{PB}=b-x$

AP：PB＝$m:n$ より　$(x-a):(b-x)=m:n$

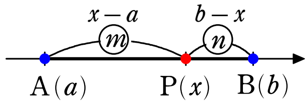
よって　$n(x-a)=m(b-x)$

ゆえに　$(m+n)x=na+mb$

したがって　$x=\dfrac{na+mb}{m+n}$ …… ①

長さと 比の値を区別するため、比の値には○や□を付けるとよい

$\boxed{a<b}$



[2] <u>$a>b$ のときも</u>，　$b<x<a$ であるから

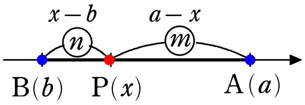
$\mathrm{AP}=a-x$，$\mathrm{PB}=x-b$

AP：PB＝$m:n$ より　$(a-x):(x-b)=m:n$

よって　$n(a-x)=m(x-b)$　　ゆえに　$(m+n)x=na+mb$

したがって　$x=\dfrac{na+mb}{m+n}$ ……

$\boxed{a>b}$



特に，**$m=n$ のとき**点 P は線分 AB の**中点**となり，その座標は $\dfrac{a+b}{2}$ である。

次に，線分 AB を $m:n$ に外分する点 Q (x) の座標を求めてみよう。

まず，$m>n$ のときを考える。

$a<b$ のとき，$a<b<x$ であるから

$\mathrm{AQ}=x-a$，　$\mathrm{BQ}=x-b$

AQ：QB＝$m:n$ より

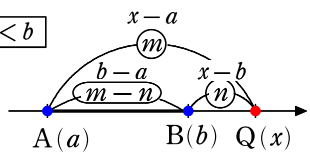
$(x-a):(x-b)=m:n$

よって　$m(x-b)=n(x-a)$

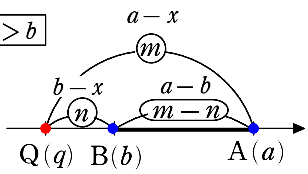
ゆえに　$(m-n)x=-na+mb$

したがって　$x=\dfrac{-na+mb}{m-n}$ …… ②

$\boxed{m>n,\ a<b}$



$\boxed{m>n,\ a>b}$



同様にして，② は a と b，m と n の大小に関係なく得られる。以上のことをまとめると，次のようになる。

> **線分の内分点，外分点**
>
> 数直線上の 2 点 A(a)，B(b) に対して，
>
> 1　線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$
>
> 2　線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は $\dfrac{-na+mb}{m-n}$

図形と方程式【直線上の点】 p.72～74

青チャートⅡ：例題 71

整理すると

線分の内分点・外分点

2 点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，○：□ に内分する点を P，外分する点を Q とする。

「ABを～」とあるので

分子は A の座標（a），B の座標（ b ）の 順に掛ける

内分点 P の座標は $\dfrac{\square\cdot a+\bigcirc\cdot b}{\bigcirc+\square}$，外分点 Q の座標は $\dfrac{-\square\cdot a+\bigcirc\cdot b}{\bigcirc-\square}$

分母は比率の順番通り（○，□）に並べる
分子は比率（分母）と逆順（□，○） に並べる

外分のときは、小さい方の比率をマイナスにする

注意 内分点の座標で n を $-n$ におき換えたものが，外分点の座標である。

とくに，線分 AB の中点の座標は $\dfrac{a+b}{2}$

問 1） 2 点 A(1)，B(5) を結ぶ線分 AB について，次の点の座標を求めよ。

「ABを～（について～）」とあるので

分子は A の座標（1），B の座標（5）の 順に掛ける

(1) 3：1 に内分する点 C

内分点 C の座標は $\dfrac{1\cdot1+3\cdot5}{3+1}=\dfrac{16}{4}=4$

分母は比率の順番通りに並べる
分子は比率（分母）と逆順に並べる
（たすき掛けの要領）

(2) 1：3 に内分する点 D

内分点 D の座標は $\dfrac{3\cdot1+1\cdot5}{1+3}=\dfrac{8}{4}=2$

(3) 3：1 に外分する点 E

外分点 E の座標は $\dfrac{-1\cdot1+3\cdot5}{3-1}=\dfrac{14}{2}=7$

外分なので小さい方をマイナスにする
分母は比率の順番通りに並べる
分子は比率（分母）と逆順に並べる
（たすき掛けの要領）

(4) 1：3 に外分する点 F

外分点 F の座標は $\dfrac{3\cdot1-1\cdot5}{-1+3}=\dfrac{-2}{2}=-1$