図形と方程式【２点間の距離】 p.75〜76

青チャートⅡ：例題 72〜74

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】２点間の距離を座標から求められるようになろう。

□座標平面上の２点間の距離

文字の右下の数字を添字という

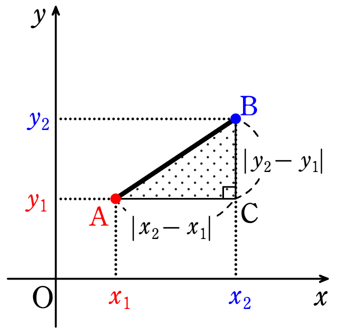
座標平面上の 2 点 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB を求めてみよう。

直線 AB が x 軸，y 軸のどちらにも平行でないとき，右の図において

$$\mathrm{AC}=|x_2-x_1|,\quad \mathrm{BC}=|y_2-y_1|$$

△ABC は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\sqrt{\mathrm{AC}^2+\mathrm{BC}^2}\\&=\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}\\&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\end{aligned}$$



例えば　$x_1=x_2$ であれば

$\mathrm{AB}=\sqrt{0^2+(y_2-y_1)^2}\ =|y_2-y_1|$

この式は，直線 AB が x 軸，または y 軸に平行なときにも成り立つ。

以上のことをまとめると，次のようになる。

> **２点間の距離**　2 点 A $(x_1,\ y_1)$，B $(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は
>
> $$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
>
> とくに，原点 O と点 A $(x_1,\ y_1)$ の距離 OA は
>
> $$\mathrm{OA}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$$

２つの座標の差の２乗の和 にルートを付けたもの

例２）　2 点 A (2, 3)，B (4, −1) 間の距離 AB は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(4-2)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

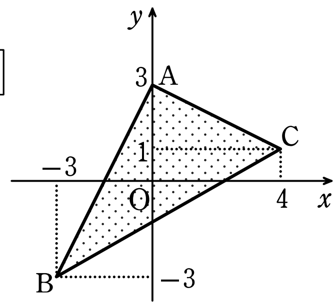
原点 O と点 A の距離 OA は

$$\mathrm{OA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$$

終

例題１） 3 点 A (0, 3)，B (−3, −3)，C (4, 1) を頂点とする △ABC は，直角三角形であることを示せ。

直角三角形 ⇒ 三平方の定理が成り立つ



解答　$\mathrm{AB}^2=(-3-0)^2+(-3-3)^2=45$

$\mathrm{BC}^2=(4+3)^2+(1+3)^2=65$

$\mathrm{CA}^2=(0-4)^2+(3-1)^2=20$

２乗なので ルートが不要

よって　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{BC}^2$

ゆえに，△ABC は，BC を斜辺とする直角三角形である。

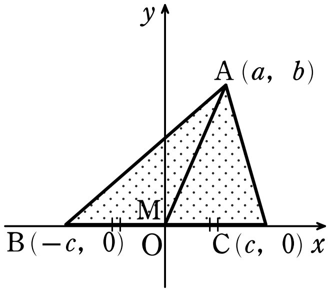
図形と方程式【２点間の距離】 p.75～76

青チャートⅡ：例題 72～74

応用例題１） △ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，等式

$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$ が成り立つ。このことを証明せよ。

考え方 … 座標平面上に △ABC をとって証明する。そのとき，辺の長さの計算がしやすいように座標軸を定めるとよい。



証明　直線 BC を x 軸に，辺 BC の垂直二等分線を y 軸にとると，M は原点 O になり，3 頂点は

A $(a,\ b)$，B $(-c,\ 0)$，C $(c,\ 0)$

とする。

点Bと点Cは x 軸上にあり，
原点が BC の中点となるので対称的な点となる

このとき

２乗するとルートが不要になる

２つの座標の差の２乗の和

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= AB^2+AC^2\\
&=\{(-c-a)^2+(0-b)^2\}+\{(c-a)^2+(0-b)^2\}\\
&=a^2+2ac+c^2+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2\\
&=2a^2+2b^2+2c^2
\end{aligned}
$$

QRコード：応例１別証明

三平方の定理を
用いた別証明

また

２乗するとルートが不要になる

２つの座標の差の２乗の和

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= 2(AM^2+BM^2)\\
&=2\{(a^2+b^2)+c^2\}\\
&=2a^2+2b^2+2c^2
\end{aligned}
$$

中線定理（パップスの定理）

よって　$AB^2+AC^2=2(AM^2+BM^2)$　終

深める　応用例題 1 の証明において，B，C の座標はそのままで A $(0,\ b)$ とするとさらに計算がしやすくなるが，このようにおくのは不適切である。この理由を説明してみよう。

深める　BC を x 軸上にとると点の取り方は次の各場合が考えられる。

(1) A $(a,\ b)$，B $(0,\ 0)$，C $(c,\ 0)$

(2) A $(0,\ a)$，B $(b,\ 0)$，C $(c,\ 0)$

(3) A $(a,\ b)$，B $(-c,\ 0)$，C $(c,\ 0)$

どの置き方で計算するのが好都合であるか、理由を説明してみよう。