図形と方程式【平行と垂直】 p.83～84

青チャートⅡ：例題 79

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】平行・垂直の意味を理解し、活用できるようになろう

□２直線の平行と垂直

2 直線が平行あるいは垂直となる条件について考えてみよう。

2 直線

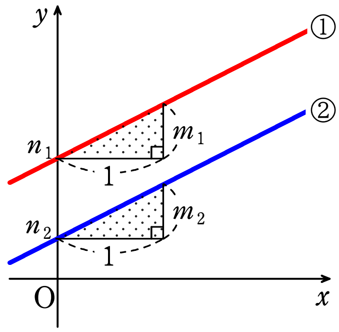
$y=m_1x+n_1$ …… ①

$y=m_2x+n_2$ …… ②

が平行であるのは，それらの傾きが等しいときである。

よって，次のことが成り立つ。

2 直線 ①，② が平行 $\Longleftrightarrow$ $m_1=m_2$



【注意】 $m_1=m_2$ かつ $n_1=n_2$ のとき，直線 ①，② は一致するが，

この場合も，直線 ①，② は平行であると考えることにする。

別解 ①②を実際に連立すると

$(m_1-m_2)x=n_2-n_1$

$m_1=m_2$ かつ $n_1 \neq n_2$ のとき解なし

$m_1=m_2$ かつ $n_1=n_2$ のとき解は無数

となり，一致するときも平行とすると

平行条件は　$m_1=m_2$

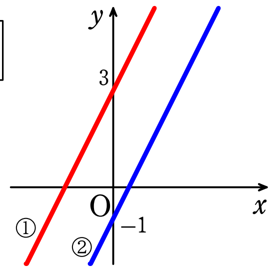
例） 2 直線　$y=\boxed{2}x+3$ …… ①

$y=\boxed{2}x-1$ …… ②

は，傾きがどちらも $\boxed{2}$ で等しい。

よって，この 2 直線は平行である。 終

傾きが等しい⇔平行



次に，2 直線 ①，② が垂直ならば，

それらに平行で原点 O を通る 2 直線

$y=m_1x$，　$y=m_2x$

も垂直である。これらの直線上に，それぞれ点 P$(1,\ m_1)$，

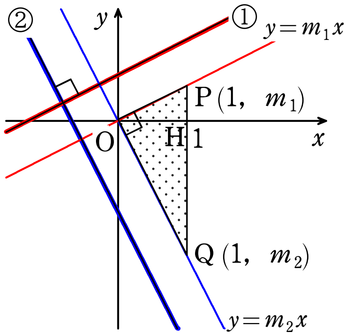
Q$(1,\ m_2)$ をとると，△OPQ は ∠POQ＝90° の直角三角形

であるから

$$\mathrm{OP}^2+\mathrm{OQ}^2=\mathrm{PQ}^2 \quad \cdots\cdots ③$$

よって　$(1^2+{m_1}^2)+(1^2+{m_2}^2)=(m_1-m_2)^2$ …… ④

ゆえに　$m_1m_2=-1$ …… ⑤



逆に，⑤ が成り立つと，④ も成り立ち，したがって ③ も成り立つから，2 直線 ①，② は垂直である。

別解 △OHP∽△QHO から OH : QH＝HP : HO

$1:(-m_2)=m_1:1$　よって　$m_1m_2=-1$

図形と方程式【平行と垂直】 p.83～84

青チャートⅡ：例題 79

2 直線の平行・垂直

2 直線 $y=m_1x+n_1$，$y=m_2x+n_2$ について

2 直線が平行 $\iff$ $m_1=m_2$

2 直線が垂直 $\iff$ $m_1\cdot m_2=-1$

平行なら傾きは同じ

垂直なら傾きは掛けて -1

⇒**符号違いの逆数**

＜注意＞ $m_1=m_2$，$k_1=k_2$ のとき，2 直線は一致する（重なる）が，

この場合も傾きが同じなので 2 直線は平行であると考えることにする。

例題３） 点 $(1,\ 4)$ を通り，直線 $2x+3y+5=0$ に平行な直線 ℓ，

垂直な直線 ℓ' の方程式を，それぞれ求めよ。

例題 3

解答 直線 $2x+3y+5=0$ の傾きは $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{5}{3}$ より $-\dfrac{2}{3}$ である。

よって，直線 ℓ の方程式は

$y-$(通る点 y 座標)$=$ $\boxed{\text{傾き}}$ $\cdot(x-$(通る点 x 座標))

$$y-4=-\frac{2}{3}(x-1)\quad すなわち\quad 2x+3y-14=0$$

直線 ℓ' の傾きを m とすると，$-\dfrac{2}{3}m=-1$ から $m=\dfrac{3}{2}$

垂直なら傾きは掛けて -1

⇒**符号違いの逆数**

よって，直線 ℓ' の方程式は

$$y-4=\frac{3}{2}(x-1)\quad すなわち\quad 3x-2y+5=0$$

問題の形にそろえる

例題 3 の直線 ℓ，ℓ' の方程式は，それぞれ $2(x-1)+3(y-4)=0$，

$3(x-1)-2(y-4)=0$ の形に表される。

参考 一般に，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線，垂直な直線は，

それぞれ次の方程式で表される。

$b=0$ のときも使える！

平行 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$，　垂直 $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

補足 証明 は [1] $a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$ のとき [2] $a=0$，$b\fallingdotseq 0$ のとき [3] $a\fallingdotseq 0$，$b=0$ のとき に分けて行う

係数に文字を含むなど，傾きを出す変形が面倒な式の場合などは

点 A $(2,\ 1)$ を通り，直線 $3x-(k-3)y-6=0$ に垂直

$(k-3)\cdot(x-2)+3\cdot(y-1)=0$ でつくれる。

※平行移動なので座標の値は

符号違いになる

※垂直な直線は

a，b どちらかを

符号違いにする

参考 一般に，点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線，垂直な直線は，

それぞれ次の方程式で表される。

平行 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$，　垂直 $b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

証明

[1] $a\fallingdotseq 0$，$b\fallingdotseq 0$ のとき

直線 $ax+by+c=0$ …… ① の傾きは $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ より $-\dfrac{a}{b}$ であるから

①に平行な直線の方程式は　$y-y_1=-\dfrac{a}{b}(x-x_1)$

すなわち　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

また，①に垂直な直線の方程式は　$y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)$

すなわち　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

[2] $a=0$，$b\fallingdotseq 0$ のとき

①は $y=-\dfrac{c}{b}$ となり，y 軸に垂直，x 軸と平行な直線である

よって $(x_1,\ y_1)$ を通り，①に平行，垂直な直線の方程式は，それぞれ次のようになる。

平行： $y=y_1$　　垂直： $x=x_1$

一方，平行な直線　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

垂直な直線　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

において，$a=0$，$b\fallingdotseq 0$ とすると

平行： $b(y-y_1)=0$ から　$y=y_1$

垂直： $b(x-x_1)=0$ から　$x=x_1$

で，これらは上で求めた結果と一致する。

[3] $a\fallingdotseq 0$，$b=0$ のとき

①は $x=-\dfrac{c}{a}$ となり，x 軸に垂直，y 軸と平行な直線である

よって $(x_1,\ y_1)$ を通り，①に平行，垂直な直線の方程式は，それぞれ次のようになる。

平行： $x=x_1$　　垂直： $y=y_1$

一方，平行な直線　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

垂直な直線　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

において，$a\fallingdotseq 0$，$b=0$ とすると

平行： $a(x-x_1)=0$ から　$x=x_1$

垂直： $-a(y-y_1)=0$ から　$y=y_1$

で，これらは上で求めた結果と一致する。