図形と方程式【２直線の関係】 p.85～86

青チャートⅡ：例題 80～82

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】２直線と２元１次連立方程式の関係性を理解しよう。

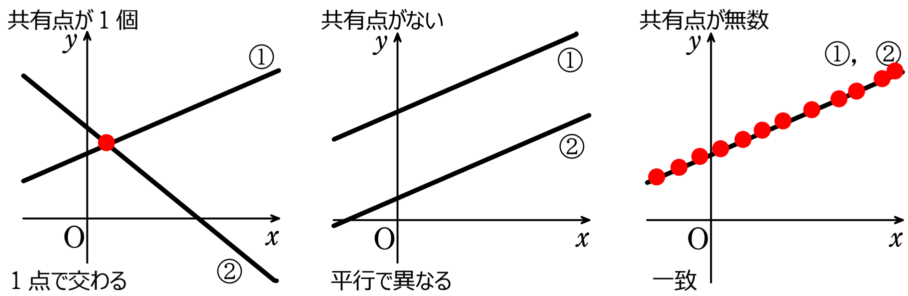
□２直線の関係と連立１次方程式の解

座標平面上の２直線が，方程式

$$ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

$$a'x+b'y+c'=0 \quad \cdots\cdots ②$$

で与えられているとする。2 直線 ①，② が共有点をもつとき，その共有点の座標は，方程式 ①，② を連立させた連立方程式の解である。この 2 直線の関係と連立方程式の解について，次のことが成り立つ。



2 直線が 1 点で交わる ⟺ 連立方程式はただ 1 組の解をもつ
2 直線が平行で一致しない ⟺ 連立方程式は解をもたない
2 直線が一致する ⟺ 連立方程式は無数の解をもつ

例７） 連立方程式 $2x+y+3=0 \quad \cdots\cdots ①$

$ax+y+c=0 \quad \cdots\cdots ②$

がただ 1 組の解をもつための必要十分条件は，2 直線 ①，② が 1 点で交わる，すなわち，平行でないことである。

直線 ① の傾き は -2，直線 ② の傾きは $-a$ であるから $a \fallingdotseq 2$ 終

問２） 例 7 の連立方程式が解をもたないための必要十分条件を求めよ。

また，無数の解をもつための必要十分条件を求めよ。

解答 ① から $y=-2x-3$ ② から $y=-ax-c$

連立方程式 ①，② が解をもたないための必要十分条件は，2 直線 ①，② が平行で，かつ一致しないことであるから

$-2=-a$，$-3 \fallingdotseq -c$ よって $a=2$，$c \fallingdotseq 3$

連立方程式 ①，② が無数の解をもつための必要十分条件は，2 直線 ①，② が一致することであるから

$-2=-a$，$-3=-c$

よって $a=2$，$c=3$

図形と方程式【２直線の関係】 p.85～86

青チャートⅡ：例題 80～82

問題６） 次の問いに答えよ。

(1) 2 直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ について，次のことを証明せよ。

ただし，$b_1\fallingdotseq 0$，$b_2\fallingdotseq 0$ とする。

2 直線が平行 $\Longleftrightarrow$ $a_1b_2-a_2b_1=0$

2 直線が垂直 $\Longleftrightarrow$ $a_1a_2+b_1b_2=0$

証明　$a_1x+b_1y+c_1=0$ …… ①　　$a_2x+b_2y+c_2=0$ …… ② とする。

$b_1\fallingdotseq 0$，$b_2\fallingdotseq 0$ であるから，直線 ①，② の傾きは，それぞれ $-\dfrac{a_1}{b_1}$，$-\dfrac{a_2}{b_2}$

2 直線 ①，② が平行であるための必要十分条件は，それらの傾きが等しいことであるから

$$-\frac{a_1}{b_1}=-\frac{a_2}{b_2}$$

よって　$a_1b_2-a_2b_1=0$ …… ③

> **平行条件：** $a_1b_2-a_2b_1=0$　平行は比（傾き）が同じ
>
> $\Leftrightarrow$ $a_1b_2=a_2b_1$ $\Leftrightarrow$ $a_1:b_1=a_2:b_2$
>
> **注意** 平行条件には一致する場合も含まれるので問によっては注意すること

また，2 直線 ①，② が垂直であるための必要十分条件は，それらの傾きの積が -1 であることから

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right)\left(-\frac{a_2}{b_2}\right)=-1$$

よって　$a_1a_2+b_1b_2=0$ …… ④

> **垂直条件：** $a_1a_2+b_1b_2=0$　縦に掛けて 横に足す
>
> $\Leftrightarrow$ $-a_1a_2=b_1b_2$ $\Leftrightarrow$ $a_1:b_1=b_2:(-a_2)$

補足　$b_1=0$ のとき，①は $x=-\dfrac{c_1}{a_1}$ $(a_1\fallingdotseq 0)$ で「平行条件： $b_2=0$ 」，

「垂直条件： $a_2=0$ 」となり，③，④が成り立つ。$b_2=0$ のときも同様。

(2) 2 直線 $ax+y=1$，$(a+1)x-2y=2$ が平行であるとき，および垂直であるときの定数 a の値を，それぞれ求めよ。

解答　(1) から，2 直線が平行となるための必要十分条件は

$$a\cdot(-2)-1\cdot(a+1)=0$$

すなわち　$-3a-1=0$

よって　$a=-\dfrac{1}{3}$

> 2 直線の傾きを求めて考えてもよいが
> 係数に文字係数を含むため
> 分母が 0 にならないように場合分けが必要となる

2 直線が垂直となるための必要十分条件は

$$a(a+1)+1\cdot(-2)=0$$

整理して　$a^2+a-2=0$

よって　$(a-1)(a+2)=0$

ゆえに　$a=1,\ -2$

図形と方程式【２直線の関係】 p.85〜86

青チャートⅡ：例題 80〜82

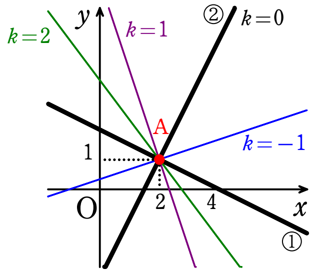
□２直線の交点を通る直線の方程式

2 直線 $x+2y-4=0$ …… ①，$2x-y-3=0$ …… ② は 1 点で交わる。

ここで，k を定数として，方程式

$$k(x+2y-4)+(2x-y-3)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。



①と②交点を A とすると，①と②の連立方程式の解は

$x=2$，$y=1$ であるから A $(2,\ 1)$ である。

また，③は $x=2$，$y=1$ に対して常に成り立つから，

<u>k がどんな値をとっても，③ の表す図形は A を通る。</u>

定点A という

「k の値に関係なく」は
「すべての k について…」
「任意の k に対して…」
「k に対して常に…」
などと表現される

③ を整理すると　$(k+1)x+(2k-1)y-4k-1=0$

係数 $k+1$，$2k-1$ は同時に 0 になることはないから，

③ は x，y の 1 次方程式である。

２直線の交点を通る直線

したがって，<u>③ は 2 直線 ①，② の交点を通る直線を表す。</u>

ただし，直線 ① は表さない。

例８） 上の 2 直線 ①，② の交点と，点 $(-1,\ 5)$ を

通る直線の方程式を求めてみよう。

解答　k を定数として　$k(x+2y-4)+(2x-y-3)=0$　…… ③

とすると，③ は 2 直線の交点を通る直線を表す。

直線 ③ が点 $(-1,\ 5)$ を通るから，

③ に $x=-1$，$y=5$ を代入して

$$5k-10=0$$

よって　$k=2$

これを ③ に代入して整理すると

$$4x+3y-11=0$$ 終

深める
l を定数とする。
$(x+2y-4)+l(2x-y-3)=0$ ……④
とするとき，③ が表すことのできる図形と④が表すことのできる図形は同じだろうか。

GeoGebraで確認してみよう ！

補足　異なる２直線 $f(x,y)=0$，$g(x,y)=0$ がいくつかの交点をもつとき
$kf(x,y)+g(x,y)=0$ （k は定数）はそれらの交点すべてを通る曲線を表す（ただし，曲線 $f(x,y)=0$ を除く）

図形と方程式【２直線の関係】 p.85～86

青チャートⅡ：例題 80～82