

【態度目標】 取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】 問題読解をしっかりと行うことで、問題の条件を式にして解けるようになる

□ 直線に関して対称な点

例題 4)

直線 $2x - y - 3 = 0$ を l とする。直線 l に関して

点 $A(1, 4)$ と対称な点 B の座標を求めよ。

【方針】 … 点 B の座標を (a, b) として、
右の [1], [2] が成り立つように
 a, b についての方程式を作る。

【解答】 点 B の座標を (a, b) とする。

[1] 直線 l の傾きは 2,

直線 AB の傾きは $\frac{b-4}{a-1}$ である。 $AB \perp l$ であるから

$$2 \cdot \frac{b-4}{a-1} = -1$$

両辺に $a-1$ をかけて $2 \cdot (b-4) = -1 \cdot (a-1)$

$$2b - 8 = -a + 1$$

$$\text{すなわち } a + 2b - 9 = 0 \quad \cdots \cdots \text{①}$$

[2] 線分 AB の中点 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$ は

直線 l 上にあるから、 $2x - y - 3 = 0$ に代入すると

$$2 \cdot \frac{a+1}{2} - \frac{b+4}{2} - 3 = 0$$

両辺に 2 をかけて

$$2 \cdot (a+1) - (b+4) - 6 = 0$$

$$2a + 2 - b - 4 - 6 = 0$$

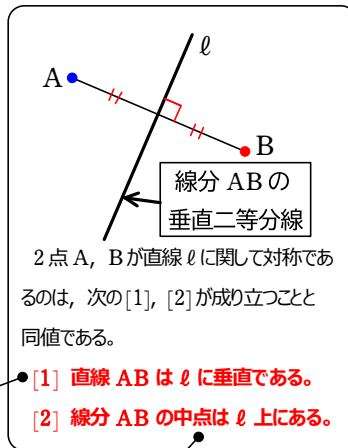
$$\text{すなわち } 2a - b - 8 = 0 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

① + 2 × ② を解くと

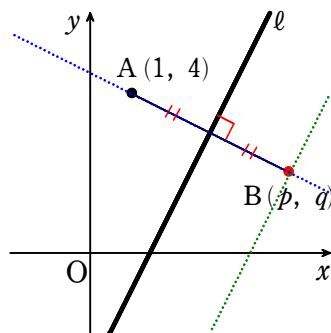
$$\begin{array}{r} a + 2b - 9 = 0 \quad \text{よって } 5a = 25 \quad \text{なので } a = 5 \\ +) 4a - 2b - 16 = 0 \\ \hline 5a \quad -25 = 0 \end{array}$$

②に代入して $10 - b - 8 = 0$ なので $b = 2$

よって、点 B の座標は $(5, 2)$



$x + 2y - 9 = 0$ ①は
点 A を通り直線 l に垂直な直線



$2x - y - 8 = 0$ ②は
点 B を通り直線 l に平行な直線

【別解】 A (1, 4), B (a, b)として線分ABの垂直二等分線が $2x - y - 3 = 0$ であるから

垂直二等分線上の点を (x, y) とすると

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$$

整理して $2(a-1)x + 2(b-4)y - a^2 - b^2 + 17 = 0$ …… ①

よって $2(a-1) : 2(b-4) : (-a^2 - b^2 + 17) = 2 : (-1) : (-3)$

$$(a-1) : (b-4) = 2 : (-1), 2(a-1) : (-a^2 - b^2 + 17) = 2 : (-3)$$

$$-a+1 = 2b-8, -6a+6 = -2a^2 - 2b^2 + 34$$

ゆえに $a = -2b + 9, a^2 + b^2 - 3a - 14 = 0$

$$(-2b+9)^2 + b^2 - 3(-2b+9) - 14 = 0$$

$$4b^2 - 36b + 81 + b^2 + 6b - 27 - 14 = 0$$

$$5b^2 - 30b + 40 = 0$$

$$b^2 - 6b + 8 = 0$$

$$(b-2)(b-4) = 0$$

$$\therefore b = 2, 4$$

$$b = 2 \text{ のとき } a = -4 + 9 = 5 \quad b = 4 \text{ のとき } a = -8 + 9 = 1$$

したがって $(a, b) = (5, 2), (1, 4)$

このうち (1, 4) は①が直線を表さない。

2直線が一致するとき $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

平行で異なるとき $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$

ただし各係数が0でないとき