図形と方程式【点と直線の距離】 p.88～89

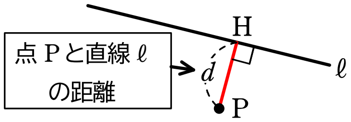
青チャートⅡ：例題 90～92

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】点と直線の距離を計算・活用できるようになろう。

□点と直線の距離

点 P から直線 ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を H とする。
このとき，線分PH の長さ d を，点 P と直線 ℓ の距離という。



【教科書通りの証明】

まず，原点 O と次の直線の距離 d を求めてみよう。

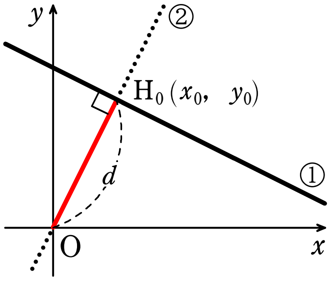
$$ax+by+c=0 \quad \cdots\cdots ①$$

原点 O から直線 ℓ に垂線 OH_0 を下ろすと，直線 OH_0 は原点を通って ℓ に垂直な直線である。よって，その方程式は

$$bx-ay=0 \quad \cdots\cdots ②$$

で表される。

原点を通り①に垂直な直線
$\Rightarrow b(x-0)-a(y-0)=0$



H_0 は 2 直線 ①，② の交点であるから，H_0 の座標 $(x_0,\ y_0)$ は，連立方程式

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ bx-ay=0 \end{cases}$$

交点の座標は連立方程式で求められる

の解である。この連立方程式を解くことにより

$$x_0=-\frac{ac}{a^2+b^2},\quad y_0=-\frac{bc}{a^2+b^2}$$

$d=OH_0$ であるから，原点 O と直線 ℓ の距離 OH_0 は

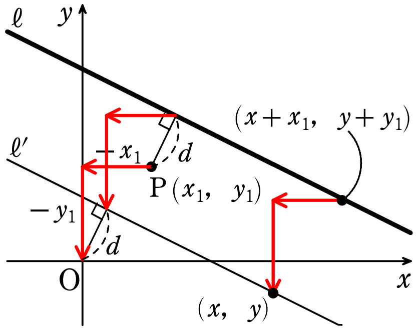
$$d=OH_0=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}=\sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)^2}}=\frac{\sqrt{c^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，次のことが成り立つ。

原点 O と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は $\quad d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

次に，<u>点 $P(x_1,\ y_1)$ と直線 ℓ の距離 d</u> を求めよう。

点 P と直線 ℓ を x 軸方向に $-x_1$，y 軸方向に $-y_1$ だけ平行移動すると，P は原点 O に，直線 ℓ はそれと平行な直線 ℓ' に移り，d は原点 O と直線 ℓ' の距離に等しい。



ℓ' の方程式は，数学 I で学んだことから，次のようになる。

$$a\{x-(-x_1)\}+b\{y-(-y_1)\}+c=0$$

すなわち $\quad ax+by+(ax_1+by_1+c)=0$

d は，原点 O と直線 ℓ' の距離に等しいから，次のことが成り立つ。

図形と方程式【点と直線の距離】 p.88〜89

青チャートⅡ：例題 90〜92

点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

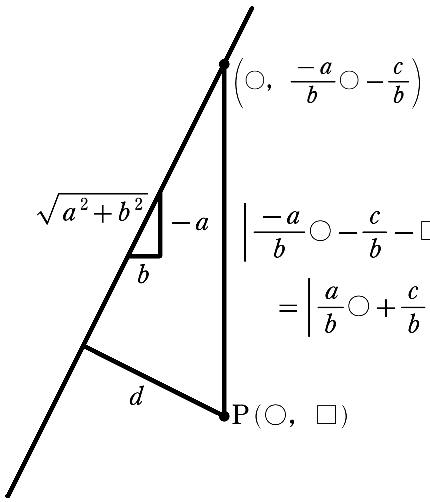
$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

別解

【比を使った証明】

$$ax+by+c=0$$

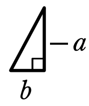
$$\Rightarrow y=\frac{-a}{b}x-\frac{c}{b}$$

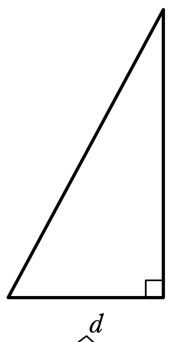


$$\left|\frac{-a}{b}○-\frac{c}{b}-□\right|$$

$$=\left|\frac{a}{b}○+\frac{c}{b}+□\right|$$

$$\sqrt{a^2+b^2} \backsim \left|\frac{a}{b}○+\frac{c}{b}+□\right|$$





比をとると、

$d:b=\left|\frac{a}{b}○+\frac{c}{b}+□\right|:\sqrt{a^2+b^2}$

内掛け外掛けすると

$d\times\sqrt{a^2+b^2}=b\times\left|\frac{a}{b}○+\frac{c}{b}+□\right|$

よって $d=\dfrac{|a\cdot○+b\cdot□+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

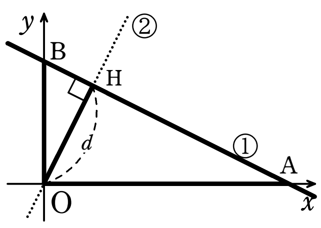
【面積を使った証明】

①が座標軸に垂直でないとき

$\mathrm{A}\left(-\frac{c}{a},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(0,\ -\frac{c}{b}\right)$ とすると △OAB の面積について

$\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{OH}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}$ より

$\mathrm{OH}=\left|-\frac{c}{a}\right|\left|-\frac{c}{b}\right|\div\sqrt{\left(-\frac{c}{a}\right)^2+\left(-\frac{c}{b}\right)^2}=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$



①が座標軸に垂直のとき　$a=0$ ならば $\mathrm{OH}=\left|\frac{c}{b}\right|$　$b=0$ ならば $\mathrm{OH}=\left|\frac{c}{a}\right|$ でこのときも成り立つ

点と直線の距離

点 $(○,\ □)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|a\cdot○+b\cdot□+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

分子の絶対値の中身は直線の式に点の座標を代入したもの

分母は直線の式の x と y の係数を２乗して足したものにルート

図形と方程式【点と直線の距離】 p.88～89

青チャートⅡ：例題 90～92

例９） 直線の方程式は必ず「＝０」の形にしておく

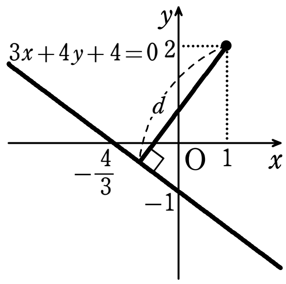
点 $(1,\ 2)$ と直線 $3x+4y+4=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot1+4\cdot2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|3+8+4|}{\sqrt{25}}=\frac{15}{5}=3$$

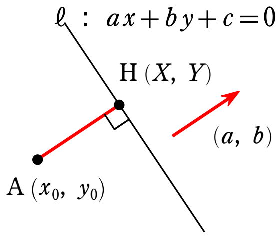
$a\geqq0$ のとき $|a|=a$

$a<0$ のとき $|a|=-a$

終



補足【ベクトル（法線ベクトル）を使った証明】



H の座標を $(X,\ Y)$ とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は ℓ の法線ベクトルと平行なので実数 t を用いて

$$(X-x_0,\ Y-y_0)=t(a,\ b)$$

と表せる。あとは H が ℓ 上にある条件： $aX+bY=-c$ を用いて

t を求めればよい。

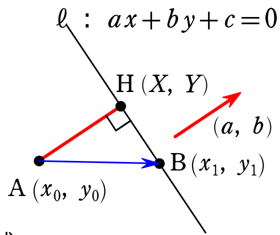
上の式の両辺に対して $(a,\ b)$ との内積をとると　$a(X-x_0)+b(Y-y_0)=ta\times a+tb\times b$

である。これと $aX+bY=-c$ より　$-c-ax_0-by_0=t(a^2+b^2)$

となる。$a^2+b^2\fallingdotseq0$ なので　$t=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$

よって AH の長さ，すなわち $t(a,\ b)$ の長さは　$d=|t|\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

補足【ベクトル（法線ベクトル＋正射影ベクトル）を使った証明】



ℓ 上の任意の点 B の座標を $\mathrm{B}(x_1,\ y_1)$，H の座標を $(X,\ Y)$ とする。

法線ベクトルを $\vec{n}$ とおくと $\vec{n}=(a,\ b)$ である。

$$(X-x_0,\ Y-y_0)=t(a,\ b)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の $\vec{n}$ への正射影ベクトルであるため

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{|(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{|ax_1+by_1-ax_0-by_0|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

となる。よって AH の長さ，すなわち $t(a,\ b)$ の長さは

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

正射影ベクトルの公式

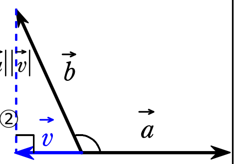
$\vec{v}$ と $\vec{a}$ は平行なので実数 k を用いて $\vec{v}=k\vec{a}$ とかける。

よって $|\vec{v}|=\pm k|\vec{a}|$ ……①

内積について考えると

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\pm|\vec{a}||\vec{v}|$

よって　$|\vec{v}|=\pm\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$ ……②



①②より $k=\pm\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ を得る

図形と方程式【点と直線の距離】 p.88～89

青チャートⅡ：例題 90～92

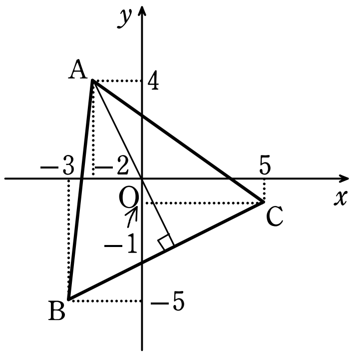
問題７） 3 点 A $(-2,\ 4)$，B $(-3,\ -5)$，C $(5,\ -1)$ について，次のものを求めよ。

(1) 直線 BC の方程式　　(2) 線分 BC の長さ

(3) 点 A と直線 BC の距離　　(4) △ABC の面積

【青チャート数学Ⅱ基本例題９１類題】

解説



(1) $y+5=\dfrac{-1+5}{5+3}(x+3)$ から

$x-2y-7=0$

(2) BC

$=\sqrt{(5+3)^2+(-1+5)^2}$

$=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

(3) 点 A と直線 BC の距離を d とすると

$$d=\frac{|-2-2\cdot4-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$$=\frac{17}{\sqrt{5}}=\frac{17\sqrt{5}}{5}$$

(4) △ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\frac{1}{2}\cdot4\sqrt{5}\cdot\frac{17}{\sqrt{5}}=34$$

【三角形の面積問題】

解法１『２点間の距離』と『点と直線の距離』で（底辺）×（高さ）÷２

解法２ 三角形を含む長方形から，余分な三角形を除く

解法３『 軸に平行な直線で三角形を分割する

解法４『 O$(0,\ 0)$，A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ のとき　$S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

与えられた点に原点が含まれていないときは，平行移動を行う