図形と方程式【図形の性質】 p.90

青チャートⅡ：例題 83～87

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

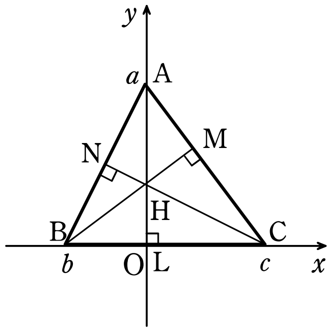
【内容目標】問題読解をしっかり行うことで、問題の条件を式にして解けるようになろう

□図形の性質の証明

三角形の頂点に向かい合う辺を，その頂点の **対 辺** という。

応用例題２） △ABC の 3 つの頂点から，それぞれの対辺またはその延長に下ろした垂線 AL，BM，CN は，1 点で交わることを証明せよ。

解説　平面上に座標軸を適当に定めて，図形の関係を式で表す。



証明　直線 BC を x 軸に，垂線 AL を y 軸にとって，

△ABC の各頂点の座標を，それぞれ次のようにおく。

A$(0,\ a)$，B$(b,\ 0)$，C$(c,\ 0)$

ただし，$a \fallingdotseq 0$ である。

$b=0$ または $c=0$ のときは，

△ABC は直角三角形となり，

3 本の垂線は，原点で交わる。

$b \fallingdotseq 0$ かつ $c \fallingdotseq 0$ のとき，

直線 AB の傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，

垂線 CN の方程式は　$y=\dfrac{b}{a}(x-c)$　すなわち　$y=\dfrac{b}{a}x-\dfrac{bc}{a}$

直線 AC の傾きは $-\dfrac{a}{c}$ であるから，垂線 BM の方程式は

$$y=\frac{c}{a}(x-b)\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{c}{a}x-\frac{bc}{a}$$

よって，2 直線 CN，BM は，ともに点 H$\left(0,\ -\dfrac{bc}{a}\right)$を通り，

H は y 軸上，すなわち直線 AL 上にある。

したがって，3 本の垂線 AL，BM，CN は 1 点で交わる。 終

応用例題 2 における 3 本の垂線が交わる点を，三角形の **垂 心** という。

問題５） 3 点 $(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$，$(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。

【青チャート数学Ⅱ基本例題８４類題】

解説

2 点 $(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$ を通る直線の方程式は

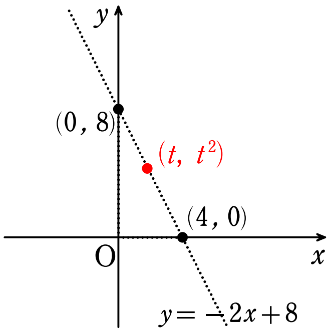
$$\frac{x}{4}+\frac{y}{8}=1 \quad \text{すなわち} \quad 2x+y-8=0$$

点 $(t,\ t^2)$ がこの直線上にあるから

$$t^2+2t-8=0$$

よって　$(t-2)(t+4)=0$

ゆえに　$t=2,\ -4$



別解　2 点 $(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{0-8}{4-0}=-2$$

$t \fallingdotseq 0$ のとき，2 点 $(0,\ 8)$，$(t,\ t^2)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{t^2-8}{t-0}=\frac{t^2-8}{t}$$

3 点 $(0,\ 8)$，$(4,\ 0)$，$(t,\ t^2)$ が

一直線上にあるための条件は，$t \fallingdotseq 0$ で

$$\frac{t^2-8}{t}=-2$$

となることである。両辺に t を掛けて

$$t^2-8=-2t$$

すなわち　$t^2+2t-8=0$

これを解いて　$t=2,\ -4$

これらは $t \fallingdotseq 0$ を満たす。

【共線条件】

2 点を通る直線上に第 3 の点が

あることを示す

① 2 点A，B を通る直線の方程式を求める

② 点C の座標を①で求めた方程式に代入して整理する

別解

3 直線のうち 2 本の傾きを 2 通り求め，それらが一致することを示す

図形と方程式【図形の性質】 p.90

青チャートⅡ：例題 83~87

演習問題９） 3 直線 $x+2y=1$，$3x-4y=1$，$ax+by=1$ が 1 点で交わるならば，

3 点 $(1,\ 2)$，$(3,\ -4)$，$(a,\ b)$ は，一直線上にあることを証明せよ。

【青チャート数学Ⅱ基本例題８４類題】

(解説)

> **【共点条件】**
> 2 直線の交点が第 3 の直線上にあることを示す
> ① 2 直線の交点を求める
> ② ①で求めた交点の座標を残った直線の方程式に代入して整理する

3 直線を

$x+2y=1$ …… ①

$3x-4y=1$ …… ②

$ax+by=1$ …… ③

とする。

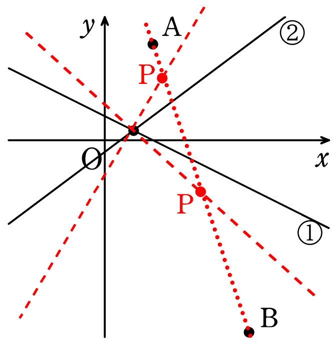
また，3 点を $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(3,\ -4)$，$\mathrm{P}(a,\ b)$ とする。

①×2+② から　$5x=3$　すなわち　$x=\dfrac{3}{5}$

① から　$y=\dfrac{1}{5}$

したがって，2 直線 ①，② の交点は $\left(\dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{5}\right)$ で，直線 ③ がこの点を通るから

$\dfrac{3}{5}a+\dfrac{1}{5}b=1$　すなわち　$3a+b=5$ …… ④



直線 AB の方程式は　$y-2=\dfrac{-4-2}{3-1}(x-1)$

よって　$3x+y-5=0$

$x=a$，$y=b$ を $3x+y-5=0$ の左辺に代入すると，④ から

$3a+b-5=5-5=0$

よって，点 P は直線 AB 上にある。

すなわち，3 点 A，B，P は一直線上にある。

別解　$x+2y=1$ …… ①，　$3x-4y=1$ …… ②，　$ax+by=1$ …… ③

とする。

直線 ①，② の傾きは異なるから，この 2 直線は 1 点で交わる。

その交点の座標を $(m,\ n)$ とし，③ も点 $(m,\ n)$ を通るとすると，①，②，③ から

$m+2n=1$，$3m-4n=1$，$am+bn=1$

これらの式は，方程式 $mx+ny=1$ …… ④ に 3 点の座標 $(1,\ 2)$，$(3,\ -4)$，$(a,\ b)$ を代入したものになっている。

また，$m+2n=1$ から，m と n は同時に 0 になることはないので，方程式 ④ は 1 つの直線 ℓ を表している。

よって，3 点 $(1,\ 2)$，$(3,\ -4)$，$(a,\ b)$ は 1 つの直線 ℓ 上にある。