図形と方程式【一般形の円の方程式】 p.94～95

青チャートⅡ：例題 94～96

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】通る３点から円の方程式をつくれるようになろう。

□$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

円の方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を変形すると，次のようになる。

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0$$

一般に，円の方程式は l，m，n を定数として，次の形に表される。

$$x^2+y^2+lx+my+n=0 \quad \cdots\cdots ①$$

逆に，① の形の方程式がどのような図形を表すか調べてみよう。

x，y の２次方程式で，
x^2 と y^2 の係数が等しく，
かつ xy の項がない。

例１１）　方程式 $x^2+y^2+2x-4y-20=0$ の表す図形

方程式を x， y それぞれについて**平方完成**をすると

$$\underline{x^2-2x}\quad+\underline{y^2-4y}\;-20=0$$

$$\underline{(x+1)^2-1}+\underline{(y-2)^2-4}-20=0$$

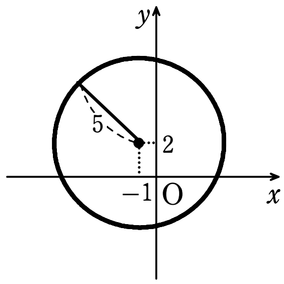
よって　$(x+1)^2+(y-2)^2=25$

よって　$(x+1)^2+(y-2)^2=5^2$

これは，点 $(-1,\ 2)$ を中心とし，半径が 5 の円を表す　終

平方完成～２取り２で割り２乗引く

$$x^2+\underbrace{◎}_{\text{2取り}}x=(x+\underbrace{○}_{\text{2で割り}})^2-\underbrace{○^2}_{\text{2乗引く}}$$



注意　方程式 $(x-a)^2+(y-b)^2=k$ において

$k>0$　ならば　「**円**」を表す

$k=0$　ならば　「**点** $(a,\ b)$ 」を表す

$k<0$　ならば　「**この方程式が表す図形はない**」

$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の場合

$$\left(x+\frac{l}{2}\right)^2+\left(y+\frac{m}{2}\right)^2=\frac{l^2+m^2-4n}{4}$$

であるから

l^2+m^2-4n の正負で決まる

問３）　次の方程式はどのような図形を表すか。

(1)　$x^2+y^2+2x-4y+5=0$　　(2)　$x^2+y^2+2x-4y+6=0$

解答

(1)　方程式を変形すると

$$x^2+2x+y^2-4y+5=0$$

すなわち

$$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+5=0$$

よって　$(x+1)^2+(y-2)^2=0$

これは，点 $(-1,\ 2)$ を表す。

(2)　方程式を変形すると

$$x^2+2x+y^2-4y+6=0$$

すなわち

$$(x+1)^2-1+(y-2)^2-4+6=0$$

よって　$(x+1)^2+(y-2)^2=-1$

この方程式が表す図形はない。

虚円と呼ぶことがある

図形と方程式【一般形の円の方程式】 p.94〜95

青チャートⅡ：例題 94〜96

□３点を通る円の方程式

例題６改） 3 点 A$(5,\ 8)$，B$(1,\ 10)$，C$(-2,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ。

解答　求める円の方程式を $\boxed{x^2+y^2+lx+my+n=0}$ とする。

３点が与えられたときは
この形からスタートが基本

点 A$(5,\ 8)$ を通るから（代入すると）

$5^2+8^2+5l+8m+n=0$　よって　$5l+8m+n=-89$ ……①

点 B$(1,\ 10)$ を通るから（代入すると）

$1^2+10^2+l+10m+n=0$　よって　$l+10m+n=-101$ ……②

点 C$(-2,\ 1)$ を通るから（代入すると）

$(-2)^2+1^2-2l+m+n=0$　よって　$-2l+m+n=-5$ ……③

①−③より

$$\begin{array}{rrcl} & 5l+8m+n &=& -89 \\ -) & -2l+\ \ m+n &=& -5 \\ \hline & 7l+7m &=& -84 \\ & l+m &=& -12 \ \cdots\cdots④ \end{array}$$

②−③より

$$\begin{array}{rrcl} & l+10m+n &=& -101 \\ -) & 2l+\ \ \ m+n &=& -5 \\ \hline & 3l+\ 9m &=& -96 \\ & l+\ 3m &=& -32 \cdots\cdots⑤ \end{array}$$

⑤−④より

$$\begin{array}{rrcl} & l+3m &=& -32 \\ -) & l+\ \ m &=& -12 \\ \hline & 2m &=& -20 \\ \therefore & m &=& -10 \end{array}$$

④より　$l=-m-12=10-12=-2$

③より　$n=2l-m-5=-4+10-5=1$

したがって　$l=-2,\ m=-10,\ n=1$

よって，求める円の方程式は

もとの式に代入する

$$x^2+y^2-2x-10y+1=0$$

例題）で求めた円の方程式を変形すると

$$(x-1)^2+(y-5)^2=25$$

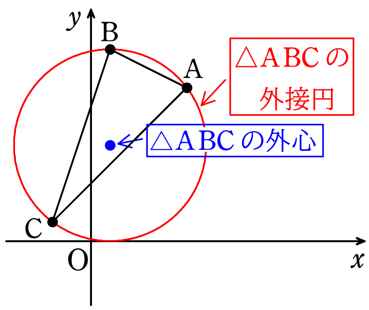
よって，円の中心の座標は $(1,\ 5)$ である。

この円のように，△ABC の 3 つの頂点を通る円を

△ABC の **外接円** といい，

外接円の中心を △ABC の **外心** という。

数学Ａの
おさらい



図形と方程式【一般形の円の方程式】 p.94～95

青チャートⅡ：例題 94～96

●余裕があれば他の解き方も考えてみよう

例題６） 次の３点を通る円の方程式を求めよ。

$$A(-1,\ 7),\ B(2,\ -2),\ C(6,\ 0)$$

別解 求める円は△ABC の外接円となるので，

AB，CA の垂直二等分線の交点が外接円の中心となる。

解答 AB の傾きは $\dfrac{-2-7}{2+1}=-3$，AB の中点は $\left(\dfrac{-1+2}{2},\ \dfrac{7-2}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ であるから

AB の垂直二等分線は $y-\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{3}\cdot\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$

$6y-15=2x-1$

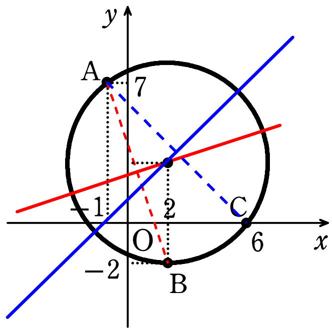
$\therefore\ 2x-6y+14=0$ より $x-3y+7=0$

CA の傾きは $\dfrac{0-7}{6+1}=-1$，CA の中点は $\left(\dfrac{-1+6}{2},\ \dfrac{0+7}{2}\right)=\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$ であるから

CA の垂直二等分線は $y-\dfrac{7}{2}=1\cdot\left(x-\dfrac{5}{2}\right)$

$2y-7=2x-5$

$\therefore\ 2x-2y+2=0$ より $x-y+1=0$



交点を求めると

$$\begin{array}{rr} & x-3y+7=0 \\ -) & x-\ \ y+1=0 \\ \hline & -2y+6=0 \end{array}$$

$\therefore y=3$

$x=y-1=3-1=2$ なので中心は $(2,\ 3)$

中心と 点 C との距離は $\sqrt{(6-2)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=5$ であるから

求める円の方程式は $(x-2)^2+(y-3)^2=25$ である

別解 円束の考えを活用する

直径の両端の２点 $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ が与えられたとき

$(x-a)(x-c)+(y-b)(y-d)=0$ で求めることができるので、これと円束の考え方を用いる。

解答 ２点A,Bを通る直線の方程式は $y+2=-3(x-2)$ より $3x+y+8=0$

２点A,Bを通る円の方程式は

$(x+1)(x-2)+(y-7)(y+2)+k(3x+y-4)=0$ と表すことができる

これが 点C を通るので

$7\cdot4+(-7)\cdot2+k(18+0-4)=0$ ゆえに $k=-1$

よって求める円の方程式は

$(x+1)(x-2)+(y-7)(y+2)-(3x+y-4)=0$

$x^2+y^2-4x-6y-12=0$