図形と方程式【円と直線の位置関係】 p.96～100

青チャートⅡ：例題 97～99

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

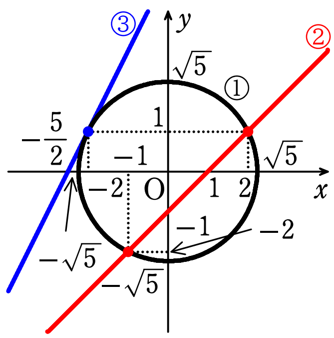
【内容目標】共有点の座標は連立方程式を活用して求めよう。

□円と直線の位置関係

注意 円と直線が共有点をもつとき，その**共有点の座標**は，それらの図形の方程式を**連立させた連立方程式の実数解**として得られる。

例題７） 円 $x^2+y^2=5$ と次の直線の共有点の座標を求めよ。

(1) $y=x-1$　　　　(2) $2x-y+5=0$



解答 (1) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=x-1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

② を ① に代入して

$$x^2+(x-1)^2=5$$

$$x^2+x^2-2x+1=5$$

$$2x^2-2x-4=0$$

２で割って　$x^2-x-2=0$

$$(x-2)(x+1)=0$$

これを解くと　$x=-1,\ 2$

② に代入して

$x=-1$ のとき　$y=-1-1=-2$，　$x=2$ のとき　$y=2-1=1$

よって，共有点の座標は　$(-1,\ -2)$，$(2,\ 1)$

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ① \\ y=2x+5 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$

③ を ① に代入して　$x^2+(2x+5)^2=5$

$$x^2+4x^2+20x+25=5$$

$$5x^2+20x+20=0$$

５で割って　$x^2+4x+4=0$

$$(x+2)^2=0$$

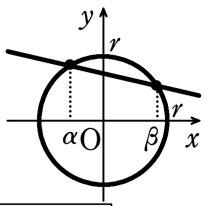
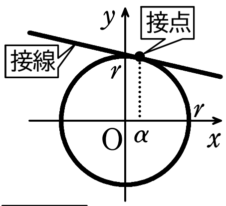
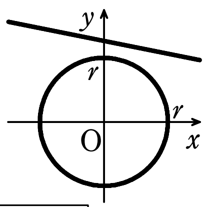
これを解くと $x=-2$ で，③ に代入して　$y=-4+5=1$

よって，共有点の座標は　$(-2,\ 1)$

□円と直線の位置関係

円の方程式 $x^2+y^2=r^2$ と直線の方程式 $lx+my+n=0$ から，例えば y を消去して得られる x の 2 次方程式を $ax^2+bx+c=0$ とすると，この 2 次方程式の実数解の個数と，円と直線の共有点の個数は一致する。

よって，この 2 次方程式の判別式を D とすると，円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $lx+my+n=0$ の位置関係は，次の表のようにまとめられる。

D の符号	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	異なる 2 つの実数解 $x=\alpha,\ \beta$ $(\alpha<\beta)$	重解 $x=\alpha$	実数解はない
円と直線の位置関係			
共有点の個数	異なる 2 点で交わる　2 個	接する　1 個	共有点をもたない　0 個

共有点をもつとき　$D\geqq 0$

一般に，円と直線の位置関係について，次のことがいえる。

円と直線の位置関係 Ⅰ

円の方程式と直線の方程式から y を消去して x の 2 次方程式が得られるとき，
その判別式を D とすると

$D>0 \iff$ 異なる 2 点で交わる

$D=0 \iff$ 接する

$D<0 \iff$ 共有点をもたない

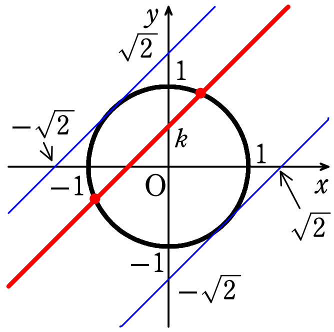
図形と方程式【円と直線の位置関係】 p.96〜100

青チャートⅡ：例題 97〜99

例題８） 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ が異なる 2 点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　連立方程式

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 & \cdots\cdots ① \\ y=x+k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$



において，② を ① に代入して整理すると

$$2x^2+2kx+k^2-1=0 \quad \cdots\cdots ③$$

この 2 次方程式の判別式を Dとすると

$$\frac{D}{4}=k^2-2(k^2-1)=-k^2+2$$

円と直線が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，$D>0$ であるから

$$-k^2+2>0$$

この不等式を解いて　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

問４） 円 $x^2+y^2=1$ と直線 $y=x+k$ について，次の問いに答えよ。

注意　例題８の設定をそのまま使っています

(1) 円と直線が接するとき，定数 k の値と接点の座標を求めよ。

解答　円と直線が接するための必要十分条件は，$D=0$ であるから

$$-k^2+2=0$$

この方程式を解いて　$k=\pm\sqrt{2}$

$k=\sqrt{2}$ のとき，2 次方程式 ③ の解は　$x=\dfrac{-k}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　このとき　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$k=-\sqrt{2}$ のとき，2 次方程式 ③ の解は　$x=\dfrac{-k}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　このとき　$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，接するときの k の値と接点の座標は

$k=\sqrt{2}$ のとき　$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$k=-\sqrt{2}$ のとき　$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

接点の座標を聞かれているときは
判別式を用いる解法が選ばれやすい

(2) 円と直線が共有点をもたないとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

解答　円と直線が共有点をもたないための必要十分条件は，$D<0$ であるから

$$-k^2+2<0$$

この不等式を解いて　$k<-\sqrt{2},\ \sqrt{2}<k$

図形と方程式【円と直線の位置関係】 p.96～100

青チャートⅡ：例題 97～99

また，円と直線の位置関係について，下の図から，更に次のことがわかる。

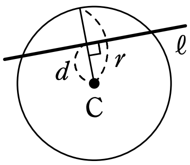
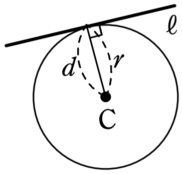
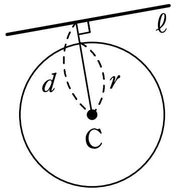
円と直線の位置関係Ⅱ

半径 r の円の中心 C と直線 ℓ の距離を d とする。

$d<r \iff$ 異なる 2 点で交わる

$d=r \iff$ 接する

$d>r \iff$ 共有点をもたない

d と r の大小	$d<r$	$d=r$	$d>r$
円と直線の位置関係	異なる 2 点で交わる  	接する  	共有点を もたない 

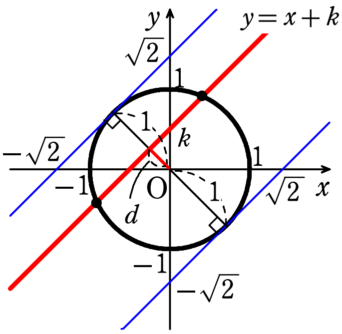
このことを用いて，前ページの例題 8 を解いてみよう。

例題８）

円 $x^2+y^2=1$ の中心は原点で，半径 r は 1 である。

原点と直線 $x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$$



円と直線が異なる 2 点で交わるための必要十分条件は，

$d<r$ であるから

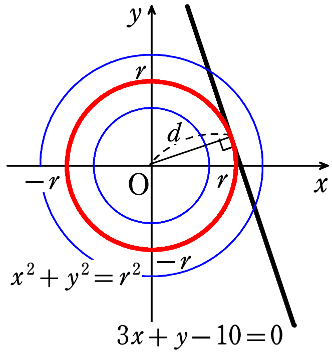
$$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<1$$

ゆえに　$|k|<\sqrt{2}$　すなわち　$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$

図形と方程式【円と直線の位置関係】 p.96～100

青チャートⅡ：例題 97～99

例題） 半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $3x+y-10=0$ が接するとき，r の値を求めよ。



[解答] この円の中心は原点であり，原点 (0，0) と

直線 $3x+y-10=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|0+0-10|}{\sqrt{9+1}}$$
$$=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}$$
$$=\frac{10}{\sqrt{10}}$$
$$=\frac{10\times\sqrt{10}}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}$$
$$=\frac{10\sqrt{10}}{10}$$
$$=\sqrt{10}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときである。

よって　　$r=\sqrt{10}$

接点の座標などを聞かれていないときに選ばれやすい解き方

円と直線　円と直線

例題 8 において，円と直線が共有点をもつのは $r\geqq\sqrt{10}$ のとき（接するときより大きいとき）である。また，共有点をもたないのは $0<r<\sqrt{10}$（接するときより小さいかつ正の値） のときである。

応用例題３）

直線 $x+y-1=0$ と円 $x^2+y^2=5$ の 2 つの交点を結ぶ線分の長さ l を求めよ。

解説　円の中心から直線に下ろした垂線は，直線と円の 2 つの交点を結ぶ線分を 2 等分する。
円の中心と直線の距離を求めて，三平方の定理を用いる。

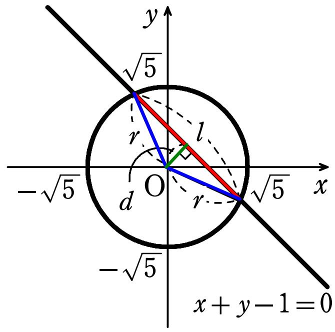
解答　円の中心 $(0,\ 0)$ と直線 $x+y-1=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

また，円の半径 r は　$r=\sqrt{5}$

よって，三平方の定理により

$$l=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{5-\frac{1}{2}}$$
$$=3\sqrt{2}$$



別解【座標から】

直線と円の交点の座標は，

次の連立方程式は実数解である。

$$\begin{cases} x+y-1=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① より　$y=-x+1$

② に代入して整理すると

$2x^2-2x-4=0$

これを解いて　$x=-1,\ 2$

③ から，$x=-1$ のとき　$y=2$

$x=2$ のとき　$y=-1$

よって直線①と円②の交点の座標は

$(-1,\ 2),\ (2,\ -1)$

ゆえに求める線分の長さは

$$\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{(-1)-2\}^2}=\sqrt{18}$$
$$=3\sqrt{2}$$

直線の傾きが m のとき
円が切り取る弦の両端の x 座標が $\alpha,\ \beta$ であれば，
その長さは $|\beta-\alpha|\sqrt{1+m^2}$

別解【解と係数の関係の利用】

直線①と円②は題意から 2 点で交わる。

①と②の交点を

$P(\alpha,\ -\alpha+1),\ Q(\beta,\ -\beta+1)$

とすると，$\alpha,\ \beta$ は

$2x^2-2x-4=0$ の 2 つの解である。

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-2$

よって

$$\begin{aligned} PQ^2&=(\beta-\alpha)^2+\{(-\beta+1)-(-\alpha+1)\}^2 \\ &=(\beta-\alpha)^2+(-\beta+\alpha)^2 \\ &=2(\beta-\alpha)^2 \\ &=2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\} \\ &=2\{1^2-4\cdot(-2)\} \\ &=18 \end{aligned}$$

ゆえに　$PQ=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

証明　2 点を$(\alpha,\ m\alpha+n),\ (\beta,\ m\beta+n)$とすると

$$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(m\beta+n)-(m\alpha+n)\}^2}$$
$$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+m^2(\beta-\alpha)^2}=|\beta-\alpha|\sqrt{1+m^2}$$