# 図形と方程式【円の接線】 p.100～102

青チャートⅡ：例題 100～104

**【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する**

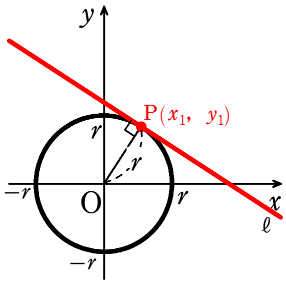
**【内容目標】設定に応じて円の接線を求めることができるようになろう**

## □円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ におけるこの円の接線 $\ell$ の方程式を求めてみよう。

[1] **P は座標軸上にない**とする。

このとき，$x_1 \neq 0$，$y_1 \neq 0$ である。




右の図で，直線 OP の傾きは $\dfrac{y_1}{x_1}$ である。

接線 $\ell$ は OP に垂直であるから，$\ell$ の傾きは $-\dfrac{x_1}{y_1}$ である。

よって，$\ell$ の方程式は　　$y-y_1=-\dfrac{x_1}{y_1}(x-x_1)$

分母を払って，整理すると　　$x_1x+y_1y={x_1}^2+{y_1}^2$

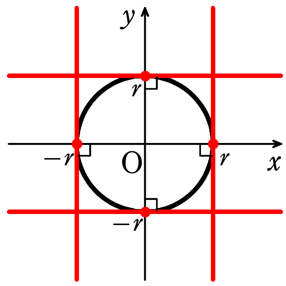
点 $(x_1,\ y_1)$ は円周上にあるから　　${x_1}^2+{y_1}^2=r^2$

よって，求める接線の方程式は，次のようになる。

$$x_1x+y_1y=r^2 \quad \cdots\cdots ①$$

[2] **P が $x$ 軸上にあるとき**，接線の方程式は

$x=r$　または　$x=-r$




[3] **P が $y$ 軸上にあるとき**，接線の方程式は

$y=r$　または　$y=-r$

ゆえに，P が座標軸上にある場合の接線の方程式も ① で表される。

したがって，次のことが成り立つ。

**円の接線**

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における

この円の接線の方程式は

$$x_1x+y_1y=r^2$$

$x^2+y^2=r^2$ を

$x \cdot x+y \cdot y=r^2$ として

片方の文字に

接点の座標 ( ○，□ )を代入すると

○$\cdot x+$□$\cdot y=r^2$ となる

**例１２）** 円 $x^2+y^2=25$ 上の点 $(4,\ -3)$ における

接線の方程式は

( $x \cdot x+y \cdot y=25$ )

$4x+(-3)y=25$

すなわち　$4x-3y=25$　　終

補足 円に接するための必要十分条件は

[1] １点を通り，半径に垂直

[2] １点を通り中心との距離が半径に等しい

[3] 直線と円の共有点が１点のみ

[4] 弦と直線のなす角が、その角内にある弧の円周角に等しい

[5] 方べきの定理 $\mathrm{PT}^2=\mathrm{AT} \cdot \mathrm{BT}$ が成り立つ

## 図形と方程式【円の接線】 p.100〜102

青チャートⅡ：例題100〜104

深める　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点P$(x_1,\ y_1)$ における円の接線の方程式 $x_1x+y_1y=r^2$ を，次の方法で求めてみよう。

[1] 直線 OP の方程式 $y_1x-x_1y=0$ を用いて，P を通り直線 OP に垂直な直線の方程式を求める

解答 [1]

直線 OP の方程式は

$y_1x-x_1y=0$ であるから，

P を通り直線 OP に垂直な直線の方程式は

$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$

変形すると　$x_1x+y_1y=x_1{}^2+y_1{}^2$

したがって　$x_1x+y_1y=r^2$

> 一般に，点$(x_1,\ y_1)$を通り，
> 直線 $ax+by+c=0$ に平行な直線，
> 垂直な直線は，それぞれ次の方程式で表される。
> 平行　$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$，
> 垂直　$b(x-x_1)-a(y-y_1)=0$

> $x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$

[2] 直線の方程式を $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$ とおき，円の中心 O と接線の距離が半径 $r$ に等しいことを用いる。

解答 [2]

接線の方程式は　$ax+by-(ax_1+by_1)=0$

$\dfrac{|ax_1+by_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=r$ から　2 乗して整理する

$\dfrac{a^2x_1{}^2+2abx_1y_1+b^2y_1{}^2}{a^2+b^2}=r^2$

$a^2x_1{}^2+2abx_1y_1+b^2y_1{}^2=r^2a^2+r^2b^2$

$(r^2-x_1{}^2)a^2-2x_1y_1ab+(r^2-y_1{}^2)b^2=0$

よって　$y_1{}^2a^2-2x_1y_1ab+x_1{}^2b^2=0$

ゆえに　$(ay_1-bx_1)^2=0$　∴　$ay_1-bx_1=0$

これと接線の方程式 $a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$

から　$x_1(x-x_1)+y_1(y-y_1)=0$

したがって　$x_1x+y_1y=r^2$

> $x_1{}^2+y_1{}^2=r^2$ より
> $y_1{}^2=r^2-x_1{}^2$
> $x_1{}^2=r^2-y_1{}^2$

> $ay_1=bx_1$ より
> $a:b=x_1:y_1$

> 別解　$(ax_1+by_1)^2=r^2(a^2+b^2)$
> $(ax_1+by_1)^2=(a^2+b^2)(x_1{}^2+y_1{}^2)$
> コーシー・シュワルツの不等式の等号成立条件より
> $ay_1-bx_1=0$

> コーシー・シュワルツの不等式
> $(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)\geqq(a_1b_1+a_2b_2)^2$
> 等号成立条件は $a_1b_2-a_2b_1=0$

# 図形と方程式【円の接線】 p.100～102

青チャートⅡ：例題 100～104

円外の点から円に引いた接線の方程式を求めてみよう。

**応用例題４）** 点 A$(1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

考え方 … 接点を P$(a,\ b)$とする。円 $x^2+y^2=5$ 上の P における接線 が，
点 A$(1,\ 3)$ を通るように， $a$ ， $b$ の値を定める。

教科書は接点を $(x_1,\ y_1)$ としている

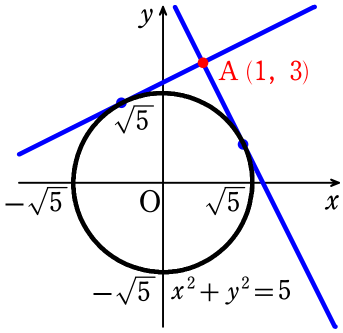
解答 接点を P$(a,\ b)$とする と，P は円上にあるから円の方程式に代入すると

$a^2+b^2=5$ …… ①

また，P における円の接線の方程式は公式より

$ax+by=5$ …… ②

で，この直線が点 A$(1,\ 3)$ を通るから②に代入すると




$a+3b=5$ …… ③

①，③ から $a$ を消去して整理する。

③より $a=5-3b$ ……④

これを①に代入すると

$(5-3b)^2+b^2=5$

$25-30b+9b^2+b^2=5$

$10b^2-30b+20=0$

10 で割って

$b^2-3b+2=0$

$(b-2)(b-1)=0$

これを解くと $b=1,\ 2$

④ に代入して $b=1$ のとき $a=5-3=2$， $b=2$ のとき $a=5-6=-1$

よって，接線の方程式 ② と接点 P の座標は，次のようになる。

接線 $2x+y=5$，接点 $(2,\ 1)$

接線 $-x+2y=5$，接点 $(-1,\ 2)$

# 図形と方程式【円の接線】 p.100～102

青チャートⅡ：例題 100～104

他の解き方も考えてみよう

**深める** 点 $(1,\ 3)$ を通る直線の方程式は，傾きを $m$ とすると，$y-3=m(x-1)$ すなわち $y=m(x-1)+3$ の形に表される。

接線の方程式をこのようにおいて，応用例題 4 を解いてみよう。

**応用例題４）** 点 A $(1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

考え方 … 接線の傾きを $m$ とおき，点 A を通る直線は　$y-3=m(x-1)$ となる。

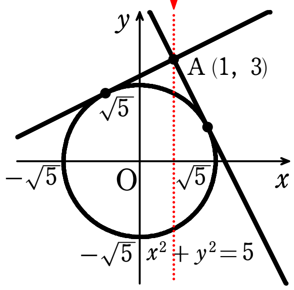
この直線が円と接する場合を考えよう

傾きを文字でおいた場合
求められないのであらかじめ確認しておく

解答 点 A を通る直線 $x=1$ は明らかに接線ではないので

接線の傾きを $m$ とする と，点 A を通る直線は　$y-3=m(x-1)$ より

$y=m(x-1)+3$　…… ①




①と $x^2+y^2=5$ から $y$ を消去して整理すると

$x^2+\{m(x-1)+3\}^2=5$

$x^2+m^2(x-1)^2+6m(x-1)+9=5$

$x^2+m^2x^2-2m^2x+m^2+6mx-6m+4=0$

$(m^2+1)x^2+(-2m^2+6m)x+m^2-6m+4=0$ …(*)

この方程式の判別式を $D$ とすると

$\dfrac{D}{4}=(-m^2+3m)^2-(m^2+1)(m^2-6m+4)$

$=m^4-6m^3+9m^2-(m^4-6m^3+5m^2-6m+4)$

$=4m^2+6m-4$

① を $mx-y-m+3=0$ として
点と直線の距離の公式を用いて
$\dfrac{|-m+3|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}$
として求めてもよい

接するとき，$D=0$ であるから　$4m^2+6m-4=0$

$2m^2+3m-2=0$

$(2m-1)(m+2)=0$

$\therefore\ m=\dfrac{1}{2},\ -2$

[1] $m=-2$ のとき　直線①は $y=-2x+5$

これを $x^2+y^2=5$ に代入して　$x^2+(-2x+5)^2=5$ より　$x^2-4x+4=0$

これを解いて $x=2$　これを $y=-2x+5$ に代入して $y=1$

よって接点の座標は　$(2,\ 1)$

(*) の重解の公式に
$m$ の値を代入して求めてもよい

[2] $m=\dfrac{1}{2}$ のとき　直線①は $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$

これを $x^2+y^2=5$ に代入して　$x^2+\left(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}\right)^2=5$ より　$x^2+2x+1=0$

これを解いて $x=-1$　これを $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ に代入して $y=2$

よって接点の座標は　$(-1,\ 2)$

解けなくもないが，やや煩雑になってしまったり
$x=1$ が接線にならないことを確認したり
しなくてはいけない

応用例題 4

# 図形と方程式【円の接線】 p.100～102

青チャートⅡ：例題100～104

○円の接線の方程式に関する取り扱いについて

① 原点中心・円上の点が与えられたとき

② 原点中心・円外の点が与えられたとき

③ 原点以外中心・円上の点が与えられたとき

④ 原点以外中心・円外の点が与えられたとき

【解法】

○ 公式利用

○ 接線⊥半径

○ 中心と接線の距離＝半径

○ 接線 ⇔ 重解

| 解答中で用いるもの | | 傾き決定 | 接点 | 原点以外 | 計算量 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1x+y_1y=r^2$ | | △ | ○ | × | △ |
| $y-y_1=m(x-x_1)$ | $D=0$ | ○ | △ | ○ | × |
| | $\dfrac{\lvert ax_1+b_1+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ | ○ | × | ○ | ○ |

その他（傾きが指定されたときなど）も含めて，そのときの最適手段を選択できるようにしておこう

円の方程式を $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ とすると $(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2$ であり この公式を用いると原点以外も対応ができる

**4STEP数学Ⅱ 問題１９９）**【③ 原点以外中心・円上の点が与えられたとき】

円 $x^2+y^2+6x-6y+5=0$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

【青チャート数学Ⅱ例題１００類題】

解答【接線⊥半径】 円の方程式を変形すると $(x+3)^2+(y-3)^2=13$

円の中心 $(-3,\ 3)$ と点 $(-1,\ 0)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{0-3}{-1+3}=-\dfrac{3}{2}$

求める接線は，この直線に垂直で，点 $(-1,\ 0)$ を通るから，その方程式は $y=\dfrac{2}{3}(x+1)$

よって $2x-3y+2=0$

別解【（平行移動と）公式利用】 円の方程式を変形すると $(x+3)^2+(y-3)^2=13$ …… ①

円 ① を，中心 $(-3,\ 3)$ が原点 $(0,\ 0)$ にくるように平行移動すると

円 $x^2+y^2=13$ …… ② になる。

この平行移動により，円 ① 上の点 $(-1,\ 0)$ は点 $(2,\ -3)$ に移る。

点 $(2,\ -3)$ における円 ② の接線の方程式は $2x-3y=13$ …… ③

求める接線は，③ を $x$ 軸方向に $-3$，$y$ 軸方向に 3 だけ平行移動したもので，その方程式は

$2(x+3)-3(y-3)=13$

すなわち $2x-3y=-2$

別解【公式利用】 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

であるから 円の方程式を変形すると $(x+3)^2+(y-3)^2=13$

よって，接線の方程式は $(-1+3)(x+3)+(0-3)(y-3)=13$

よって $2x-3y=-2$

# 図形と方程式【円の接線】 p.100〜102

青チャートⅡ：例題100〜104

**4STEP数学Ⅱ　問題２００）**【④ 原点以外中心･円外の点が与えられたとき】

次の円の接線の方程式と，その接点の座標を求めよ。

(2)　円 $x^2+y^2-6x+8=0$ の接線で，原点を通るもの

【青チャート数学Ⅱ例題１０１類題】

(2)　直線 $x=0$ は与えられた円の接線ではない。

よって，求める接線の方程式は

$$y=mx \quad \cdots\cdots ①$$

とおける。

① を円の方程式に代入して

$$x^2+(mx)^2-6x+8=0$$

整理すると　$(m^2+1)x^2-6x+8=0$　…… ②

この $x$ の 2 次方程式の判別式を $D$ とすると

$$\frac{D}{4}=(-3)^2-8(m^2+1)=-8m^2+1$$

直線 ① が円に接するから，$D=0$ が成り立つ。

よって　$-8m^2+1=0$　　ゆえに　　$m=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

[1]　$m=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

接線の方程式は　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

接点の $x$ 座標は，② の重解であるから

$$x=\frac{3}{m^2+1}=\frac{8}{3}$$

接点の $y$ 座標は　$y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{8}{3}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

別解　$x^2+y^2-6x+8=0$ より

$(x-3)^2-9+y^2+8=0$

$\therefore\ (x-3)^2+y^2=1$

接点を $(x_1,\ y_1)$ とすると円上の点であるから

$x_1{}^2+y_1{}^2-6x_1+8=0$ ……①

また接線の公式より

$(x_1-3)(x-3)+y_1y=1$ ……②

②は原点を通るので

$(x_1-3)(0-3)+y_1\cdot 0=1$

$-3x_1+9=1$

よって　$x_1=\dfrac{8}{3}$

①に代入すると

$\dfrac{64}{9}+y_1-16+8=0$

$y_1{}^2=\dfrac{8}{9}$ なので

$y_1=\pm\sqrt{\dfrac{8}{9}}=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって接点は $\left(\dfrac{8}{3},\ \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ であるから

[1] $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ を②に代入すると

$\left(\dfrac{8}{3}-3\right)(x-3)+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}y=1$

$-(x-3)+2\sqrt{2}\,y=3$

$\therefore\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

[2] $m=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき

接線の方程式は　$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$

接点の $x$ 座標は，② の重解であるから

$$x=\frac{3}{m^2+1}=\frac{8}{3}$$

接点の $y$ 座標は　$y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cdot\dfrac{8}{3}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって，接点の座標は　$\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

[1]，[2] から

接線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ のとき　接点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

接線 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ のとき　接点 $\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

[2] $\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ を②に代入すると

$$\left(\frac{8}{3}-3\right)(x-3)-\frac{2\sqrt{2}}{3}y=1$$

$$-(x-3)-2\sqrt{2}\,y=3$$

$$\therefore\ y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x$$

[1]，[2] から

接線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ のとき

接点 $\left(\dfrac{8}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

接線 $y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x$ のとき

接点 $\left(\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$