図形と方程式【２つの円】 p.103～106

青チャートⅡ：例題 105～108

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】２つの円の位置関係を式で表し，応用問題にも対応できるようになっていこう

□２つの円の位置関係

半径がそれぞれ r，r' である２つの円の中心 C，C′ の間の距離を d とする。ただし，$r>r'$ であるとする。
このとき，２つの円の位置関係と d，r，r' の関係式は，右のようになる。

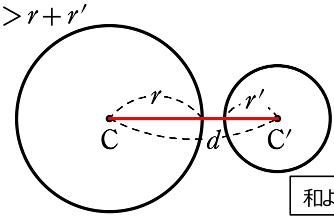
[2]，[4] のように，２つの円がただ１つの共有点をもつとき，この２つの円は **接する** といい，この共有点を **接 点** という。

また，[2] のように接する場合，２つの円は **外 接** するといい，[4] のように接する場合，２つの円は **内 接** するという。

注意 [1] ～ [3] の位置関係と d，r，r' の関係式は，$r=r'$ の場合も成り立つ。

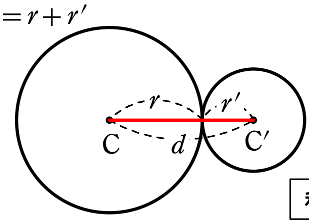
注意 ２つの円のそれぞれの中心を結ぶ直線を**中心線**といい、２つの円が接するとき、その接点は中心線上にある。さらに中心線上にある１点を共有する２つの円は接するかまたは一致する。

[1] 互いに外部にある
$d>r+r'$



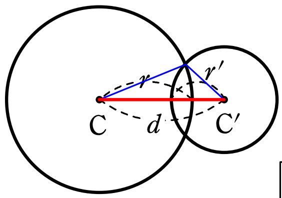
和より大きい

[2] 外接する (1 点を共有する)
$d=r+r'$



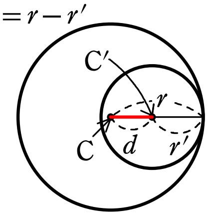
和と等しい

[3] 2 点で交わる
$r-r'<d<r+r'$



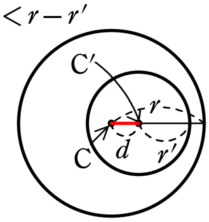
和と差の間

[4] 内接する (1 点を共有する)
$d=r-r'$



差と等しい

[5] 一方が他方の内部にある
$d<r-r'$



差より小さい

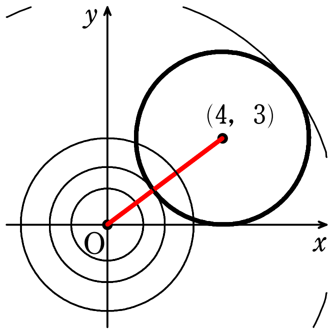
図形と方程式【２つの円】 p.103～106

青チャートⅡ：例題 105～108

次の２つの円 ①，② の位置関係について考えよう。

$x^2+y^2=r^2$ …… ①

$(x-4)^2+(y-3)^2=3^2$ …… ②



$(x-\text{中心 } x \text{ 座標})^2+(y-\text{中心 } y \text{ 座標})^2=(\text{半径})^2$

円 ① は中心が原点，半径が r の円である。

また，円 ② は中心が点 (4， 3)， 半径が 3 の円である。

２つの円の中心間の距離 d は

$$d=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=\boxed{5}$$

２点間の距離＝ $\sqrt{(x\text{ 座標の差})^2+(y\text{ 座標の差})^2}$

であり，半径 r について次のことがいえる。

[1] 円 ① が円 ② の外部にあるとき $\boxed{5}>r+3$ すなわち $r<2$ よって $0<r<2$

$d>r+r'$ 和より大きい

長さは正の数なので

[2] ２つの円 ①，② が外接するとき $\boxed{5}=r+3$ すなわち $r=2$

$d=r+r'$ 和と等しい

[3] ２つの円 ①，② が内接するとき $\boxed{5}=r-3$ すなわち $r=8$

$d=r-r'$ 差と等しい

(2) 円 ② が円 ① の内部にあるとき $\boxed{5}<r-3$ すなわち $r>8$

$d<r-r$ 差より小さい

例題９） 中心が 点 (4，3) である円 C と，円 $x^2+y^2=1$ が外接するとき，円 C の方程式を求めよ。

２点間の距離＝ $\sqrt{(x\text{ 座標の差})^2+(y\text{ 座標の差})^2}$

$(x-\text{中心 } x \text{ 座標})^2+(y-\text{中心 } y \text{ 座標})^2=(\text{半径})^2$

外接するとき
$d=r+r'$ 和と等しい

解答 円 $x^2+y^2=1$ は中心が原点，半径が 1 の円である。

２つの円の中心間の距離 d は $d=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

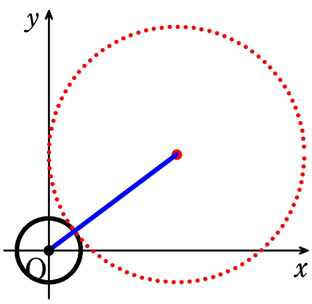
２つの円が外接するとき，円 C の半径を r とすると

$$5=r+1$$

これを解くと $r=5-1=4$

よって，円 C の方程式は中心が点 (4，3) で半径 4 なので

$$(x-4)^2+(y-3)^2=16$$



補足 判別式でも位置関係はわかるが、連立２元２次方程式を考えなければならず、交わらないときに外部か内部かまでわからない。

図形と方程式【２つの円】 p.103～106

青チャートⅡ：例題 105～108

□２つの円の共有点の座標

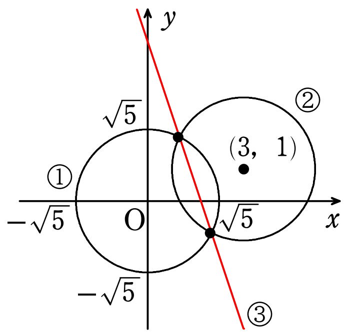
２つの円が共有点をもつとき，その共有点の座標は，２つの円の方程式を連立させた連立方程式を解くことによって，求めることができる。２つの円について，共有点の座標を求めてみよう。

応用例題５）

次の２つの円の共有点の座標を求めよ。

$x^2+y^2=5,\quad x^2+y^2-6x-2y+5=0$

考え方 … **共有点の座標を求める場合は兎にも角にも連立方程式を用いる**



解答

$$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2-6x-2y+5=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

① − ② から

$$\begin{array}{rr} & x^2+y^2 \qquad\qquad -5=0 \\ -) & x^2+y^2-6x-2y+5=0 \\ \hline & 6x+2y-10=0 \end{array}$$

$2y=-6x+10$

すなわち　$y=-3x+5$　…… ③

③ を ① に代入して整理すると

$x^2+(-3x+5)^2-5=0$

$x^2+9x^2-30x+25-5=0$

$10x^2-30x+20=0$

$x^2-3x+2=0$

これを解くと　$(x-2)(x-1)=0$

$x=1,\ 2$

③ に代入して

$x=1$ のとき　$y=-3+5=2$

$x=2$ のとき　$y=-6+5=-1$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 2),\ (2,\ -1)$

補足　応用例題５）の ③ の方程式は，２つの円の共有点を通る直線を表す。

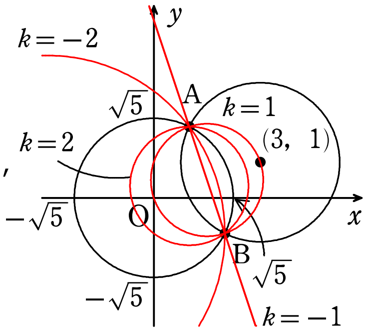
図形と方程式【２つの円】 p.103～106

青チャートⅡ：例題105～108

□２つの円の交点を通る図形　円束(えんそく)

応用例題６） 2 つの円 $x^2+y^2-5=0$ ……①，$x^2+y^2-6x-2y+5=0$ ……②

の交点と，点 $(0,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。



方針　2 つの円は2 点で交わる。その交点を A，B とする。

ここで，k を定数として，方程式

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

を考える。2 点 A，B は円 ① 上にあり，かつ円 ② 上にあるから，k がどんな値をとっても，③ の表す図形は A，B を通る。

③ を整理すると

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2-6x-2y-5k+5=0$$

よって，$k \neq -1$ のとき，③ は ①，② の交点を通る円を表し，

$k=-1$ のとき，③ は ①，② の交点を通る直線を表す。

GeoGebraで
確認してみよう

解答　k を定数として

$$k(x^2+y^2-5)+(x^2+y^2-6x-2y+5)=0 \quad \cdots\cdots ③$$

とすると，③ は 2 つの円の交点を通る図形を表す。

③ の表す図形が点 $(0,\ 3)$ を通るから，③ に $x=0$，$y=3$ を代入して

$$4k+8=0$$

よって　$k=-2$

これを ③ に代入して整理すると

$$x^2+y^2+6x+2y-15=0$$ 終

深める　方程式③は 2 点 A，B を通る円のすべてを表せるか。

まとめ

直線束（直線群）や円束（円群）の話を一般化すると

教科書の $f(x,y)+k \cdot g(x,y)=0$ は $s=1$ のとき

s と t は実数で少なくとも一つは 0 でないとする。
異なる２図形 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ がいくつかの交点をもつとき
$s \cdot f(x,y)+t \cdot g(x,y)=0$ （s，t は定数）はそれらの交点すべてを通る曲線を表す

補題　「２つの円　$x^2+y^2=1$ と $x^2+y^2-6x-8y+16=0$ の

交点を通る直線は何か」を考えたとき，

$(x^2+y^2-1)+k(x^2+y^2-6x-8y+16)=0$ に

$k=-1$ を代入して得た直線 $6x+8y-17=0$ は

何を指すだろうか？