図形と方程式【軌跡の基本】 p.108～110

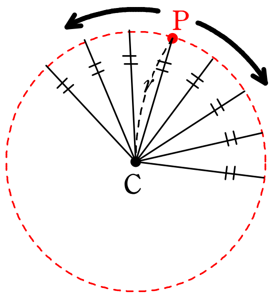
青チャートⅡ：例題109

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】軌跡の方程式の求め方や流れを理解してできるようになろう。

□座標平面上の点の軌跡 (locus)

平面上に点 C をとる。点 P が条件 CP$=r$ を満たしながら動くとき，P が描く図形は，中心が C，半径が r の円である。



一般に，与えられた条件を満たす点が動いてできる図形を，その条件を満たす点の **軌 跡** という。すなわち，軌跡はその条件を満たす点全体の集合である。

ここでは，座標を用いて，軌跡について考えてみよう。（なお，軌跡を予想したり確認したりする活動には，図形描画ソフトの利用も有効である。）

例１４） 2 点 A $(-1,\ 0)$，B $(1,\ 0)$ からの距離の 2 乗の和が 10 である点 P の軌跡

ここから解答

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

①軌跡を求める点を (x, y) とおく

P の満たす条件は

②与えられた条件を式にする

（距離の場合は 2 乗しておくとルートが付かない）

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$$

$\mathrm{AP}^2=(x+1)^2+y^2$，

$\mathrm{BP}^2=(x-1)^2+y^2$ を代入すると

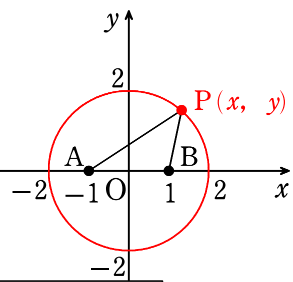
$$\{(x+1)^2+y^2\}+\{(x-1)^2+y^2\}=10$$

整理すると　$x^2+y^2=2^2$

③整理する

ゆえに，条件を満たす点 P は，

円 $x^2+y^2=2^2$ 上にある。



逆に，円 $x^2+y^2=2^2$ 上の任意の点 P $(x,\ y)$ は，上の計算を逆にたどって，

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$ を満たすことがわかる。

④逆の確認

その図形上のすべての点が条件を満たすかどうかを確かめる

よって，求める軌跡は，中心が原点，半径が 2 の円である。終

補足 「条件 p を満たす点の軌跡が q である」とは

「条件 p を満たす点全体の集合 P と，q 上の点全体の集合 Q について，$P=Q$ がなりたつこと」である

（必要十分がいえなくてはいけない）

①～③は「点 P が $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$ を満たす」 ⇒ 「点 P は円 $x^2+y^2=4$ 上にある」

ことを示しており，

④の逆の確認において

「点 P が円 $x^2+y^2=4$ 上にある」 ⇒ 「点 P は $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=10$ を満たす」

に触れることで、命題が成り立つことを示している。

なお，逆が明らかな場合，その証明を省略することがある。

図形と方程式【軌跡の基本】 p.108〜110

青チャートⅡ：例題109

与えられた条件を満たす点 P の軌跡が図形 F であることを示すには，次の 2 つのことを証明する。

1　その条件を満たす任意の点 P は，図形 F 上にある。
2　図形 F 上の任意の点 P は，その条件を満たす。

$\Leftrightarrow$ 点P の座標 $(x,\ y)$ は 方程式 $F(x,\ y)=0$ を満たす

そのため座標を用いて点 P の軌跡を求める手順は，次のようになる。

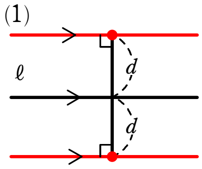
軌跡を求める手順

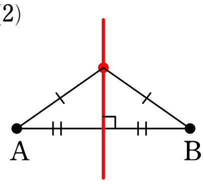
1　求める軌跡上の任意の点の座標を $(x,\ y)$ などで表し，与えられた条件を座標の間の関係式で表す。
2　軌跡の方程式を導き，その方程式の表す図形を求める。
3　その図形上の任意の点が条件を満たしていることを確かめる。（「逆に」の部分）

補足　3 が明らかな場合，その証明を省略することがある。

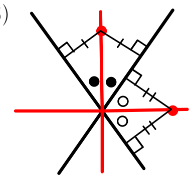
○基本の軌跡

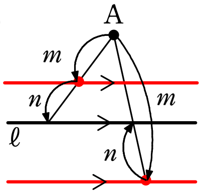
条件	図形F（軌跡）
(1) 定直線 ℓ からの距離が一定	ℓ との距離が d である 2 直線
(2) 2 定点A，B から等距離	線分 AB の垂直二等分線
(3) 交わる 2 定直線から等距離	2 組の対頂角の二等分線（この 2 直線は直交）

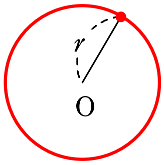
(1)


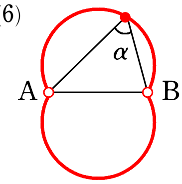
(2)


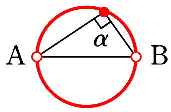
条件	図形F（軌跡）
(4) 定点 A と定直線 ℓ 上の点を結ぶ線分を一定の比 $m：n$ に分ける	A から ℓ に引いた垂線を $m：n$ に分ける点を通り ℓ に平行な直線
(5) 定点 O からの距離が一定 r	中心 O，半径 r の円
(6) 定線分 AB を等しい角 α にみる。	AB を弦とし角 α を含む弓形の弧（弦AB に関して対称な 2 つの部分）
(7) 特に AB を見る角が直角ならば	直径AB の円（ともにA，B を除く）

(3)


(4)


(5)


(6)


(7)


図形と方程式【軌跡の基本】 p.108～110

青チャートⅡ：例題 109

例題１０） 2 点 A$(0,\ 0)$，B$(3,\ 0)$ からの距離の比が 2：1 である点 P の軌跡を求めよ。

解答　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

①軌跡を求める点を $(x,\ y)$ とおく

P に関する条件は

$$AP : BP = 2 : 1$$

②条件を式にする
（距離の場合は２乗しておくとルートが付かない）

これより　$2BP = AP$

すなわち　$4BP^2 = AP^2$

③整理する

ここで

$$BP^2 = (x-3)^2 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2$$

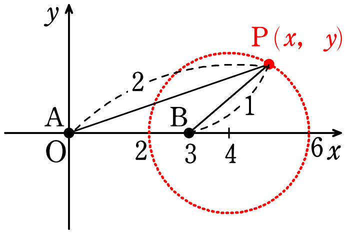
$$AP^2 = x^2 + y^2$$

であるから代入すると

$$4(x^2 - 6x + 9 + y^2) = x^2 + y^2$$

$$4x^2 - 24x + 36 + 4x^2 = x^2 + y^2$$

$$3x^2 - 24x + 36 + 3x^2 = 0$$



3 で割って　$x^2 - 8x + y^2 + 12 = 0$

$$(x-4)^2 - 16 + y^2 + 12 = 0$$

平方完成

すなわち　$(x-4)^2 + y^2 = 4$

よって，点 P は円 $(x-4)^2 + y^2 = 2^2$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点 P$(x,\ y)$ は，条件を満たす。

④逆の確認

したがって，求める軌跡は，点 $(4,\ 0)$ を中心とする半径 2 の円である。

補足　一般に，2 点 A，B からの距離の比が $m : n$ である点 P の軌跡は，$m \fallingdotseq n$ のとき円になる。
この円を **アポロニウスの円** という。
この円は，線分AB を $m : n$ に内分する点と外分する点を直径の両端とする円である。

ペルガのアポロニウス
Apollonius of Perga
紀元前262頃～紀元前190頃
『円錐曲線』を著し，17世紀の数学に影響を与えた。楕円，放物線，双曲線などについて研究をし，その理論構成は今日のものと基本的には変わっていない。

深める「点O, A, P を頂点とする△POA が OP：AP=2：1 を満たしながら変化するとき，点 P の軌跡を求めよ」の問いだと答えはどうなるだろうか？

解答　中心が $(4,\ 0)$，半径が 2 の円　ただし，2 点 $(2,\ 0)$, $(6,\ 0)$ を除く