図形と方程式【軌跡の応用】 p.108～110

青チャートⅡ：例題110～116

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】応用問題にも対応できるようになっていこう

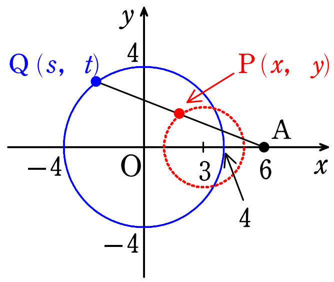
□線分の内分点の軌跡（動点･連動点の軌跡）

ここでは，点 Q が与えられた条件を満たしながら動くとき，Q に対応して定まる点 P の軌跡について調べてみよう。

応用例題７） 点 Q が円 $x^2+y^2=16$ 上を動くとき，点 A $(6,\ 0)$ と点 Q を結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を求めよ。

方針 点 P の座標（軌跡を求める方）を $(x,\ y)$，Q の座標を $(s,\ t)$ とし，Q の満たす条件 $s^2+t^2=16$ を利用して，x，y についての関係式を導く。

解答 点 P，Q の座標を，それぞれ $(x,\ y)$，$(s,\ t)$ とする。



Q は円 $x^2+y^2=16$ 上にあるから

動点の条件を式にする

$$s^2+t^2=16 \quad \cdots\cdots ①$$

P は線分 AQ の中点であるから

連動点（軌跡を求める点）の条件を式にする

$$x=\frac{6+s}{2},\quad y=\frac{0+t}{2}$$

2 を掛けて $2x=6+s$，$2y=t$

ゆえに $s=2x-6$，$t=2y$

つなぎになる文字を消去して軌跡を求めたい点の文字のみにする

これを ① に代入すると

$$(2x-6)^2+(2y)^2=16$$

$$\{2(x-3)\}^2+(2y)^2=16$$

$$2^2(x-3)^2+2^2\cdot y^2=16$$

すなわち $(x-3)^2+y^2=2^2 \quad \cdots\cdots ②$

ゆえに，条件を満たす点 P は，円 ② 上にある。

逆に，円 ② 上の任意の点 P $(x,\ y)$ は，条件を満たす。

よって，求める軌跡は，中心が点 $(3,\ 0)$，半径が 2 の円である。

図形と方程式【軌跡の応用】 p.108〜110

青チャートⅡ：例題110〜116

□媒介変数と軌跡

例題） t がすべての実数値をとって変化するとき，

次の式で表される点 $(x,\ y)$ はどのような図形上を動くか。

(1) $x=2t+1$，$y=-4t+3$

> このような表し方を媒介変数表示といい、
> t を媒介変数（助変数，パラメータparameter）という
> $$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-4t+3 \end{cases}$$
> のような形でも同じこと

解答 $x=2t+1$ から　$t=\dfrac{x-1}{2}$

$y=-4t+3$ に代入して

$$y=-4\cdot\frac{x-1}{2}+3=-2x+5$$

よって，点 $(x,\ y)$ は直線 $y=-2x+5$ 上を動く。

> 基本的には
> ① どちらかの式を
> （媒介変数）＝の形にする
> （この場合は $t=$ ）
> ② ①で作った式をもう一方の式に
> 代入して整理する

例題） a の値が変化するとき，放物線 $y=x^2-4ax-6a$ の頂点 P の軌跡を求めよ。

【青チャート数学Ⅱ基本例題１１２類題】

解答 放物線の方程式を変形すると　$y=(x-2a)^2-4a^2-6a$

よって，頂点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

> 軌跡を求める点を (x, y) に

$x=2a$ …… ①,

$y=-4a^2-6a$ …… ②

> a が媒介変数になる

① から　$a=\dfrac{x}{2}$

これを ② に代入して　$y=-4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2-6\cdot\dfrac{x}{2}$

よって　$y=-x^2-3x$ …… ③

ゆえに，点 P は放物線 ③ 上にある。

逆に，放物線 ③ 上の任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，条件を満たす。

したがって，点 P の軌跡は 放物線 $y=-x^2-3x$

図形と方程式【軌跡の応用】 p.108〜110

青チャートⅡ：例題110〜116

例題） xy 平面上の 2 直線 $tx-y=t$，$x+ty=-2t-1$ の交点 P を考える。

(1) 点 P の y 座標を求めよ。

(2) t が任意の実数値をとって変わるとき，点 P が描く軌跡を求めよ。

【関西学院大】【青チャート数学Ⅱ重要例題１１５類題】

(1) $tx-y=t$ …… ①，$x+ty=-2t-1$ …… ② とする。

②×t−① から　$(t^2+1)y=-2t^2-2t$

$t^2+1 \fallingdotseq 0$ であるから　$y=-\dfrac{2t(t+1)}{t^2+1}$

したがって，交点 P の y 座標は　$-\dfrac{2t(t+1)}{t^2+1}$

交点の軌跡

(2) ① から　$t(x-1)=y$

よって，$\boxed{x=1 \text{ のとき } \quad y=0}$ …… ③，

$x \fallingdotseq 1$ のとき　$t=\dfrac{y}{x-1}$

$t=\dfrac{y}{x-1}$ を ② に代入して t を消去すると

$$\frac{y}{x-1}(y+2)=-x-1$$

すなわち $\boxed{x^2+(y+1)^2=2 \quad (\text{ただし，} x \fallingdotseq 1)}$

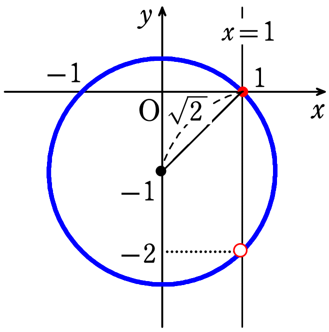
ここで，円 $x^2+(y+1)^2=2$ と直線 $x=1$ の共有点の座標を求めると　$(1,\ 0)$，$(1,\ -2)$

③ より，円 $x^2+(y+1)^2=2$ と直線 $x=1$ の 2 つの共有点のうち，点 $(1,\ 0)$ は適する。

もう一方の点 $(1,\ -2)$ は不適である。

したがって，求める点 P の軌跡は

円 $x^2+(y+1)^2=2$ から点 $(1,\ -2)$ を除いた図形



参考 ① より，$(x-1)t-y=0$ であるから，直線 ① は t の値に関わらず点 $(1,\ 0)$ を通る。

② より，$(y+2)t+x+1=0$ であるから，直線 ② は t の値に関わらず点 $(-1,\ -2)$ を通る。

また，2 直線 ①，② は $t\cdot 1+(-1)\cdot t=0$ より垂直に交わる。

よって，2 直線 ①，② の交点は，2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ -2)$ を結ぶ線分を直径とする円上にある。

一方，直線 ① は，点 $(1,\ 0)$ を通る直線のうち，直線 $x=1$ のみ表さない。 $\boxed{t \text{ が消去されてしまう→点を表す}}$

また，直線 ② は，点 $(-1,\ -2)$ を通る直線のうち，直線 $y=-2$ のみ表さない。

したがって，求める軌跡は，円 $x^2+(y+1)^2=2$ から 2 直線 $x=1$，$y=-2$ の交点 $(1,\ -2)$ を除いた図形である。