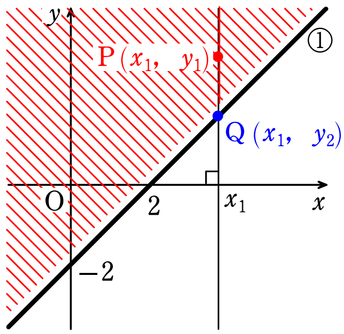
図形と方程式【領域：基本】 p.111～115，118

青チャートⅡ：例題117～121

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】不等式の表す領域を図示できるようになろう。

□直線を境界線とする領域



座標平面上で，x，y の 1 次方程式

$$y=x-2 \quad \cdots\cdots ①$$

を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は直線である。

ここでは，不等式

$$y>x-2 \quad \cdots\cdots ②$$

を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合について考えてみよう。

不等式 ② を満たす任意の点 P $(x_1,\ y_1)$ をとると

$$\boxed{y_1}>\boxed{x_1-2} \quad \cdots\cdots ③$$

が成り立つ。

また，P を通り，x 軸に垂直な直線と直線 ① の交点を Q $(x_1,\ y_2)$ とすると

$$y_2=x_1-2 \quad \cdots\cdots ④$$

③，④ から $\boxed{y_1}>\boxed{y_2}$

ゆえに，点 P は直線 ① より上側にある。

逆に，点 P $(x_1,\ y_1)$ が直線 ① より上側にあると，$(x_1,\ y_1)$ は ② を満たす。

したがって，不等式 ② を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，直線 ① より上側の部分である。

同様に，不等式 $y<x-2$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体の集合は，直線 ① より下側の部分である。

一般に，変数 x，y についての不等式を満たす座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を，その不等式の表す **領 域** という。

一般に次のことがいえる。

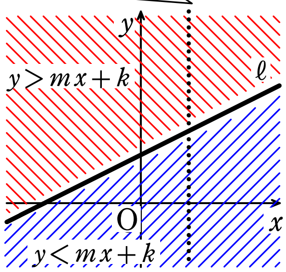
直線と領域

直線 $y=mx+k$ を ℓ とする。

1　不等式 $y>mx+k$ の表す領域は，直線 ℓ の上側の部分

2　不等式 $y<mx+k$ の表す領域は，直線 ℓ の下側の部分

直線 $x=t$ との交線を考えると、交点が $mt+k$
それより大きければ上側　　それより小さければ下側



$F(x,\ y)>0$ となる点 $(x,\ y)$ の存在領域を「正領域」
$F(x,\ y)<0$ となる点 $(x,\ y)$ の存在領域を「負領域」
という

注意 $y\geqq mx+k$ や $y\leqq mx+k$ の表す領域（等号付き）は，直線 $y=mx+k$ を含む。

図形と方程式【領域：基本】 p.111～115，118

青チャートⅡ：例題 117～121

例１５） 不等式 $3x-2y-2\leqq 0$ の表す領域

不等式を変形すると

$$y\geqq\frac{3}{2}x-1$$

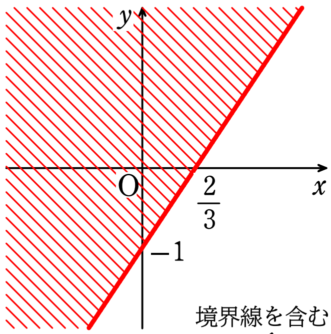
※ 不等号を等号に変えて、まずは境界線を描く

したがって，求める領域は直線

$y=\dfrac{3}{2}x-1$ およびその上側の部分である。

すなわち，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。 終



境界線を含む

注意 不等号にイコールが付いているときは この文章を図のそばなどに付ける

【その１】 領域を示す線は「 $y<$ 」であれば直線より下
「 $y>$ 」であれば直線より上

【その２】 不等式に (0, 0) などを代入して調べる
（式変形をしなくて良いので楽なことが多い）

$y\geqq\dfrac{3}{2}x-1$ となるから
直線とその上側の部分である

原点を代入すると
$0-0-2\leqq 0$
となり成立するので原点を含む部分である

どちらかで判断する！

○直線のかき方

$3x-2y-2=0$ について

$x=0$ を代入すると $-2y-2=0$ $\therefore y=-1$

$y=0$ を代入すると $3x-2=0$ $\therefore x=\dfrac{2}{3}$

よって $(0,\ -1)$ と $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ を通る直線を描く

問５） 次の不等式の表す領域を図示せよ。

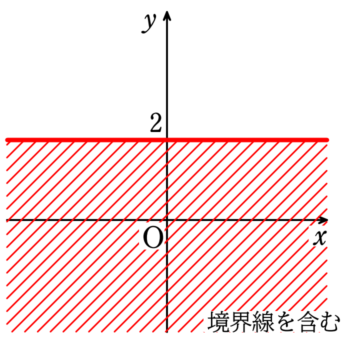
(1) $y\leqq 2$

解答 求める領域は，

直線 $y=2$ およびその下側の部分である。

すなわち，図の斜線部分である。ただし，境界線を含む。

(1)



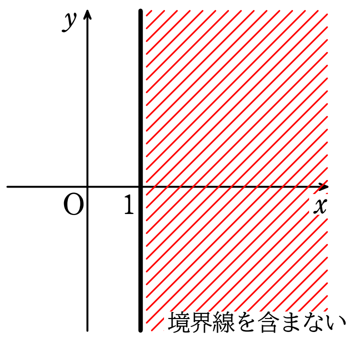
(2) $x>1$

解答 求める領域は，

直線 $x=1$ の右側の部分である。

すなわち，図の斜線部分である。ただし，境界線を含まない。

(2)



【直線のかき方例】点を２個つくり（ 例えば $y=2$ なら $(0,\ 2)$ と $(2,\ 2)$ ），２点を通る直線を描く

【領域の判定方法例】不等式に (0, 0) を代入すると $0>2$ となり正しくないので原点を含まない領域を塗る

（原点でなくても良いが，直線上にない点を代入する）

図形と方程式【領域：基本】 p.111～115, 118

青チャートⅡ：例題117～121

□円を境界線とする領域

不等式 $(x-1)^2+(y-3)^2<2^2$ …… ①

の表す領域について考えてみよう。

点 $C(1,\ 3)$ と点 $P(x,\ y)$ の距離 CP は

$$CP=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

であるから，不等式 ① は

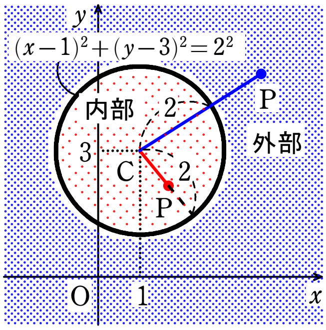
$$CP^2<2^2 \quad \text{すなわち} \quad CP<2$$

が成り立つことを示している。よって，

不等式 ① の表す領域は，円 $(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$ の内部である。

また，不等式 $(x-1)^2+(y-3)^2>2^2$ の表す領域は，同様に考えると，

円 $(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$ の外部であることがわかる。



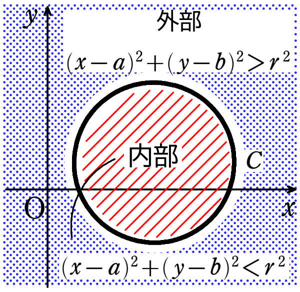
円で分けられる領域について，一般に次のことが成り立つ。

円と領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とする。

1　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は，円 C の 内部

2　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は，円 C の 外部



注意 $(x-a)^2+(y-b)^2\leqq r^2$ や $(x-a)^2+(y-b)^2\geqq r^2$ の表す領域は，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を含む。

問6） 不等式 $(x+2)^2+y^2\leqq 1$ の表す領域を図示せよ。

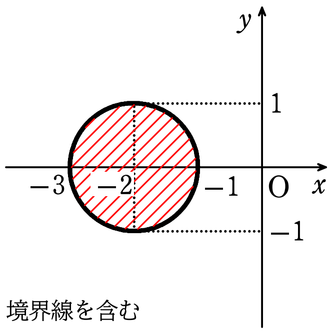
解答　求める領域は，

円 $(x+2)^2+y^2=1$ およびその内部である。

すなわち，図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

※不等式に 中心の座標を代入して領域を判定してもよいが、
円の場合はもとの式の不等号から内部外部の判断してしまおう



境界線を含む

例題１１）　次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$x^2+y^2-2x-4y+1\leqq 0$$

解答　不等式は

$$(x-1)^2+(y-2)^2\leqq 4$$

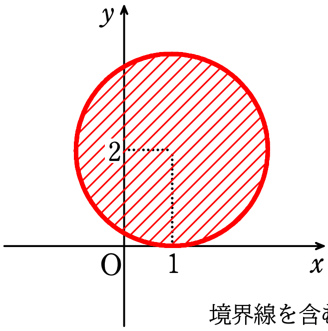
と変形できるから，求める領域は，円

$$(x-1)^2+(y-2)^2=4$$

およびその内部である。

すなわち，右の図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。



境界線を含む

問７） 中心が点 $(2,\ -3)$，半径が 5 の円の内部を表す不等式を作れ。

ただし，境界線を含まないものとする。

解答　中心が点 $(2,\ -3)$，半径が 5 の円の方程式は　　まず境界線を定める

$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

この円の内部を表す不等式は　$(x-2)^2+(y+3)^2<25$　　領域を決める

□直線や円を境界線とする領域のおさらい

手順１）　不等号を等号に変えて、まず境界線を描く。

手順２）　境界線上のにない点の座標を不等式に代入する。

成り立てば点を含む領域を塗る。成り立たなければ点を含まない領域を塗る

手順３）　境界線を含む。　**不等号にイコールが付いているとき**はこの文章を図のそばなどに付ける

境界線を含まない。　**不等号にイコールが付いていないとき**はこの文章を図のそばなどに付ける

一般に，曲線 $f(x,\ y)=0$ は座標平面を，いくつかの部分（ブロック）に分ける。

そして，$f(x,\ y)$ が $x,\ y$ の多項式であるとき

$f(x,\ y)$ の符号（正・負）は，分けられたブロック内で一定である

解説　１つのブロック内に任意の２点 $P(x_1,\ y_1)$，$Q(x_2,\ y_2)$ をとり，

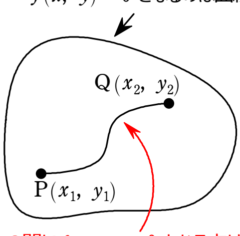
P と Q をブロックの中だけを通る曲線で結ぶ。

この曲線上に $f(x,\ y)=0$ となる点は存在しないから，

P から Q まで曲線上を動く間に $f(x,\ y)$ の符号は変化しない。

よって，$f(x_1,\ y_1)$ と $f(x_2,\ y_2)$ は同符号である。

$f(x,\ y)=0$ となるのは曲線上のみ



P と Q の間に $f(x,\ y)=0$ となる点はない

境界線の交点以外のところで境界線を越えると $f(x,\ y)$ の符号（正・負）は変わっている