図形と方程式【領域と最大最小】 p.116

青チャートⅡ：例題 122～126

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】不等式の表す領域を用いて，最大値や最小値を導き出せるようになろう。

□領域と最大・最小

応用例題８） x，y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ 2x+3y \leqq 12,\ 2x+y \leqq 8$$

を満たすとき，$x+y$ の最大値および最小値を求めよ。

考え方　$x+y=k$ とおくと $y=-x+k$ であり，これは傾きが -1，y 切片が k の直線を表す。この直線が与えられた連立不等式の表す領域と共有点をもつような k の値の範囲を調べる。

解答　与えられた連立不等式の表す領域を A とする。

領域 A は 4 点

$(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$

を頂点とする四角形の周および内部である。

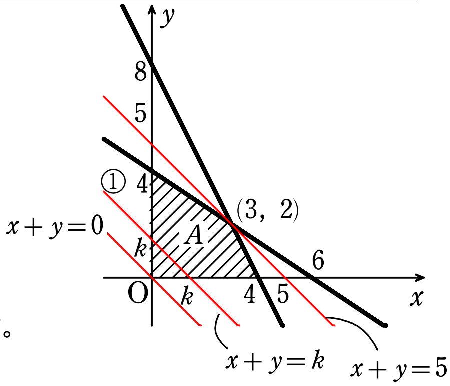
$x+y=k$ …… ①

とおくと，$y=-x+k$ であり，

これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す。

この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの

k の値の最大値，最小値を求めればよい。



GeoGebraで確認してみよう

領域 A においては，直線 ① が

点 $(3,\ 2)$ を通るとき k は最大で，そのとき　$k=5$

点 $(0,\ 0)$ を通るとき k は最小で，そのとき　$k=0$

である。

したがって，$x+y$ は

$x=3$，$y=2$ のとき最大値 5 をとり，

$x=0$，$y=0$ のとき最小値 0 をとる。

基本的には
直線の交点や、円との接点が
最大･最小の候補となることがほとんど

深める　m は定数とする。x，y が応用例題 8 と同じ条件を満たすとき，$mx+y$ が $x=0$，$y=4$ のときに最大値をとるような m の値の範囲を求めよう。

解答　$mx+y=l$ とおくと，これは傾きが $-m$，y 切片が l の直線を表す。

直線 $mx+y=l$ が点 $(0,\ 4)$ を通るとき　$l=4$　よって　$mx+y=4$ …… ①′

この直線が領域 A と点 $(0,\ 4)$ のみを共有点にもつか，または 2 点 $(0,\ 4)$，$(3,\ 2)$ を通る直線と一致するような m の範囲を求めれば良い。

2 点 $(0,\ 4)$，$(3,\ 2)$ を通る直線の傾きは $-\dfrac{2}{3}$ であるから　$-m \geqq -\dfrac{2}{3}$　$\therefore\ m \leqq \dfrac{2}{3}$

図形と方程式【領域と最大最小】 p.116

青チャートⅡ：例題 122～126

例題）

ある工場の製品 A，B を 1 トン生産するのに必要な原料 P，Q の量と製品 A，B の価格は，それぞれ右の表の通りとする。

	原料 P	原料 Q	価格
A	3 トン	1 トン	2 万円
B	1 トン	2 トン	1 万円

この工場へ 1 日に供給できる原料 P が最大 9 トン，
原料 Q が最大 8 トンであるとき，工場で 1 日に生産される製品 A，B の総価格を最大にするには，A，B をそれぞれ，1 日に何トンずつ生産すればよいか。

このような問題を
「線形計画問題」
このような問題の解き方を
「線形計画法」という。
経営学などで用いられる。

シンプレックス法など
解くためのアルゴリズムが存在する

解答

	原料 P	原料 Q	価格
A	3 トン	1 トン	2 万円
B	1 トン	2 トン	1 万円

x トンとする

y トンとする

$3x+y$ トンとなる

$x+2y$ トンとなる

総価格は $2x+y$ 円となる

これらについて不等式や方程式を考える

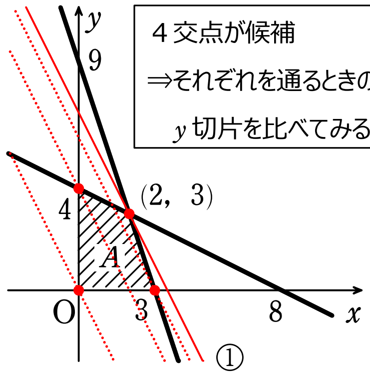
1 日の A，B の生産量を，それぞれ x トン，y トンとすると，
原料 P，Q の 1 日の使用量はそれぞれ，$3x+y$，$x+2y$ (トン) である。
与えられた条件より　$x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+y \leqq 9$，$x+2y \leqq 8$　が成り立つ。
この連立不等式の表す領域 A は右の図のようになり，
4 点

$(0,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(2,\ 3)$，$(0,\ 4)$

を頂点とする四角形の周および内部である。
総価格を k 万円とすると

$2x+y=k$　…… ①

である。① は傾きが -2，y 切片が k である直線を表す。
図から，領域 A では，直線 ① が点 $(2,\ 3)$ を通るとき k が最大となる。



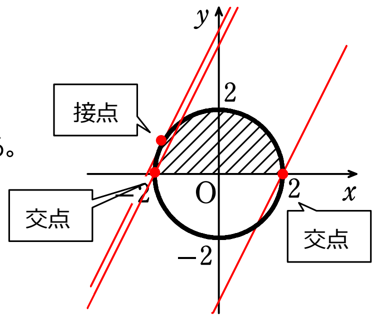
4 交点が候補
⇒それぞれを通るときの
y 切片を比べてみる

よって，総価格を最大にするには，1 日あたり A を 2 トン，B を 3 トン生産すればよい。

4STEP数学Ⅱ 問題２３４）

x，y が 2 つの不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$，$y \geqq 0$ を満たすとき，$2x-y$ の最大値，最小値を求めよ。

解答



連立不等式

$x^2+y^2 \leqq 4$，$y \geqq 0$

を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域は右図の斜線部分である。

ただし，境界線を含む。

$2x-y=k$ …… ① とおくと，

① は傾きが 2，y 切片が $-k$ の直線を表す。

図から，直線 ① が点 $(2,\ 0)$ を通るとき $-k$ の値は最小となる。

すなわち，k の値は最大となる。

このとき　$k=2\cdot 2-0=4$

また，領域上で直線 ① が円 $x^2+y^2=4$ に接するとき $-k$ の値は最大となる。

すなわち，k の値は最小となる。

① から　$y=2x-k$ …… ②

これを $x^2+y^2=4$ に代入して　$x^2+(2x-k)^2=4$

よって　$5x^2-4kx+k^2-4=0$ …… ③

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-4)=-k^2+20$$

直線 ① が円に接するとき，$D=0$ であるから

$-k^2+20=0$　よって　$k=\pm 2\sqrt{5}$

接点が領域上にあるとき，接線 ② の y 切片は正であるから　$k=-2\sqrt{5}$

このとき，③ から　$x=\dfrac{2k}{5}=-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

② から　$y=2\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)-k=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

よって，$2x-y$ は

$x=2$，$y=0$ のとき最大値 4，

$x=-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，$y=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ のとき最小値 $-2\sqrt{5}$

をとる。