図形と方程式【領域を使用した証明法】 p.117

青チャートⅡ：例題 131

【態度目標】取り組む、しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】領域を用いて真偽を証明してみよう。

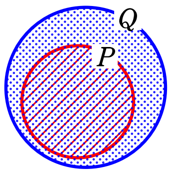
□領域を利用した証明

２つの条件 p，q について

条件 p を満たすもの全体の集合を P

条件 q を満たすもの全体の集合を Q

とすると，次のことが成り立つ。



数学Ⅰで習った必要十分条件での真偽の関係を思い出そう

東京 $\boxed{十}$ ⟹ $\boxed{必}$ 日本

(狭い) ⟸ (広い)

「東京 ならば 日本 が真である」

⟺「東京⊂日本 が成り立つ」

「p ならば q が真である」⟺「$P \subset Q$ が成り立つ」

条件 p，q が x，y の不等式で表される場合に，

「$P \subset Q$ が成り立つ」ことから「p ならば q が真である」ことを証明してみよう。

応用例題９）

x，y は実数とする。次のことを証明せよ。

$$x^2+y^2<1 \quad \text{ならば} \quad x^2+y^2+2y-3<0$$

$\boxed{\text{考え方}}$ 不等式 $x^2+y^2<1$，$x^2+y^2+2y-3<0$ の表す領域を，それぞれ P，Q として，$P \subset Q$ であることを示す。

$\boxed{\text{証明}}$ 不等式

$$x^2+y^2<1$$

の表す領域を P，不等式

$$x^2+y^2+2y-3<0$$

の表す領域を Q とする。

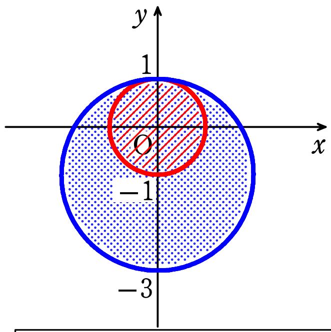
P は円 $x^2+y^2=1$ の内部，

Q は円 $x^2+(y+1)^2=4$ の内部であり，

図から $P \subset Q$ である。

よって，

$x^2+y^2<1$ ならば $x^2+y^2+2y-3<0$ である。 $\boxed{\text{終}}$



ちゃんと含む含まれるの関係になっていることを示す

（はみ出ていないことに注意しよう）

$\boxed{\text{別解}}$（領域を用いない解法）

$x^2+y^2<1$ から $y^2<1$ よって $-1<y<1$ から $2y-3<-1$

ゆえに $(x^2+y^2)+(2y-3)<1+(-1)=0$