図形と計量【正弦・余弦・正接】 p.134～138

青チャートⅠ：例題133～136

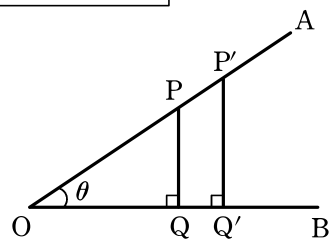
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】三角比の定義を身に付け、三角比の値を使って角や辺の長さを求めよう

□三角比（正接・正弦・余弦）

θ はギリシャ文字でシータと読む。

右の図において，2つの半直線 OA，OB のなす角 θ は鋭角，すなわち $0° < \theta < 90°$ であるとする。



∠AOB の辺 OA 上の2点 P，P′ から辺OB に，それぞれ垂線 PQ，P′Q′ を下ろすと

$$\triangle POQ \backsim \triangle P'OQ'$$

よって　$PQ : OQ = P'Q' : OQ'$

すなわち　$\dfrac{PQ}{OQ} = \dfrac{P'Q'}{OQ'}$

$a:b = m:n$ は
$\dfrac{a}{b} = \dfrac{m}{n}$ や $a:m = b:n$
$an = bm$ などと表せる

$0° < \theta < 90°$	$90°$	$90° < \theta < 180°$	$180°$
鋭角	直角	鈍角	平角

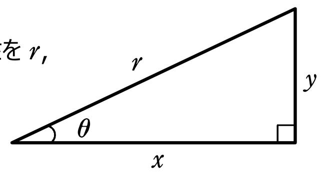
ゆえに，$\dfrac{PQ}{OQ}$ の値は，辺 OA 上の点 P の位置に関係なく，<u>θ だけによって定まる。</u>

$\dfrac{PQ}{OQ}$ を角 θ の **正 接** または **タンジェント** (tangent) といい，**$\tan\theta$** で表す。

また同様に，$\dfrac{PQ}{OP}$，$\dfrac{OQ}{OP}$ の値も，辺 OA 上の点 P の位置に関係なく，<u>θ だけによって定まる。</u>

$\dfrac{PQ}{OP}$ を角 θ の **正 弦** または **サイン** (sine) といい，**$\sin\theta$** で表す。また，$\dfrac{OQ}{OP}$ を角 θ の **余 弦** または **コサイン** (cosine) といい，**$\cos\theta$** で表す。

直角三角形の鋭角の1つを θ とし，斜辺の長さを r，他の辺の長さを右の図のように，x，y とするとき，



教科書裏表紙裏の三角比の表などを見てみよう

$$\frac{y}{r},\quad \frac{x}{r},\quad \frac{y}{x}$$

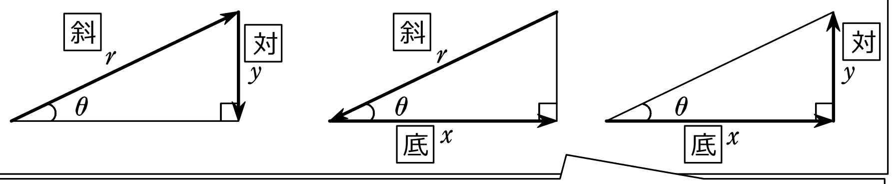
の各値は，**<u>三角形の大きさに関係なく，いずれも</u>** **<u>角 θ の大きさだけで定まる。</u>**

正弦，余弦，正接をまとめて **三角比** という。

直角三角形なら定義をイメージ

三角比の定義

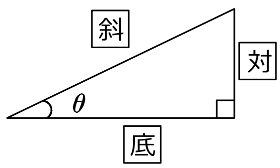
$\sin\theta = \dfrac{y}{r} = \dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$　　$\cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$　　$\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{\text{対辺}}{\text{底辺}}$



【覚え得】 直角の向かいの辺を**「斜辺」**

θ （注目する角）の向かいの辺を**「対辺」**

残りの辺を**「底辺」**



図形と計量【正弦・余弦・正接】 p.134～138

青チャートⅠ：例題133～136

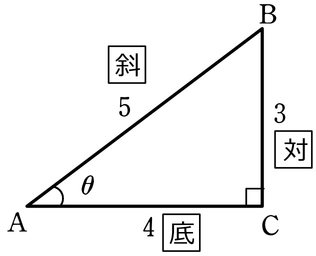
例１） θ の正弦，余弦，正接

右の図の直角三角形 ABC では

$$\sin\theta=\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}=\frac{3}{5}$$

$$\cos\theta=\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}=\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{対辺}}{\text{底辺}}=\frac{3}{4}$$ 終



例） 右の図の直角三角形 ABC では斜辺が分かっていないので

三平方の定理を用いて求める

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

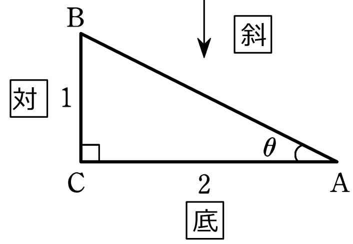
$$=2^2+1^2=4+1=5$$

$AB>0$ なので　$AB=\sqrt{5}$

$$\sin\theta=\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

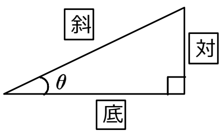
$$\cos\theta=\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan\theta=\frac{\text{対辺}}{\text{底辺}}=\frac{1}{2}$$ 終



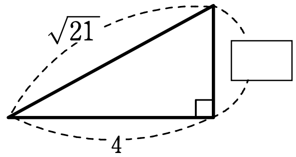
三角「比」なので有理化しなくても良い
（問題の状況による）

【おさらい・三平方の定理】

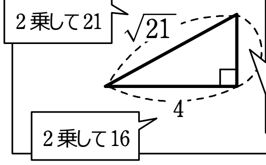


$\boxed{斜}^2=\boxed{対}^2+\boxed{底}^2$

【有名な直角三角形の辺の比】
ピタゴラス数といい
３：４：５
１３：５：１２ （父さんご自由に）
１５：８：１７ などがある



【図の中で処理】



斜辺は「和」
他辺は「差」
$21-16=5$
ルートをつけて
$\sqrt{5}$

【式で処理】
あてはまる数を x とする。
三平方の定理より
$4^2+x^2=(\sqrt{21})^2$
よって　$x^2=(\sqrt{21})^2-4^2$
$=21-16=5$
$x>0$ であるから　$x=\sqrt{5}$

参考 直角三角形の３辺の長さ

$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$

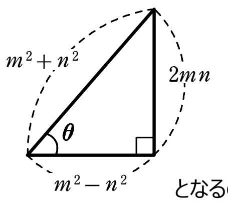
が成り立つことから，$m>n$ のとき

m^2-n^2，$2mn$，m^2+n^2 を辺の長さとする

三角形は直角三角形である。

$m=2$，$n=1$ のとき，３辺は 3，4，5

$m=3$，$n=2$ のとき，３辺は 5，12，13



図から　$\sin\theta=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$

$$\cos\theta=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$$

$$\tan\theta=\frac{2mn}{m^2-n^2}$$

となるので，m，n に自然数を代入すると

有理数の三角比が得られる。

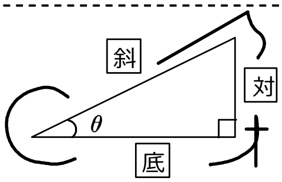
図形と計量【正弦・余弦・正接】 p.134～138

青チャートⅠ：例題133～136

参考 「斜辺・対辺・底辺」を用いるときは図形の向きなどは関係ないが

図形からサイン、コサイン、タンジェントを読み解くときは

左下に θ がないとダメなので注意しよう



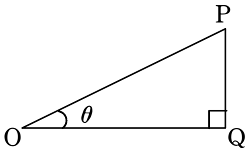
参考 右のような直角三角形 POQ の 3 つの辺の長さの比は ${}_3P_2=6$ (通り) が考えられる。

$\sin\theta=\dfrac{PQ}{OP}$, $\cos\theta=\dfrac{OQ}{OP}$, $\tan\theta=\dfrac{PG}{OQ}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 以外に

正割 (せいかつ secant) $\sec\theta=\dfrac{OP}{OQ}=\dfrac{1}{\cos\theta}$
セカント

余割 (よかつ cosecant) $\mathrm{cosec}\,\theta=\csc\theta=\dfrac{OP}{PQ}=\dfrac{1}{\sin\theta}$
コセカント

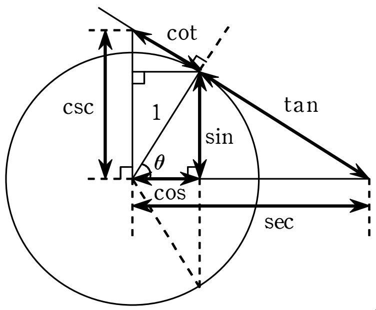
余接 (よせつ cotangent) $\cot\theta=\dfrac{OQ}{PQ}=\dfrac{1}{\tan\theta}$
コタンジェント



補足

	弦	接	割
正	正弦 sin	正接 tan	正割 sec
余	余弦 cos	余接 cot	余割 csc

補足 半径１の円（単位円）での長さ

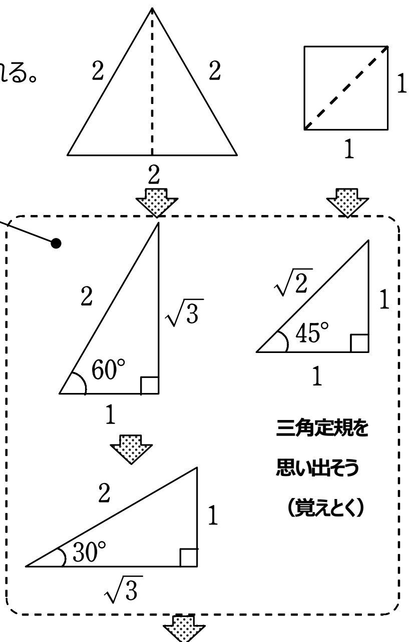


□特別な直角三角形 30°, 45°, 60° の三角比

30°, 45°, 60° の三角比は，右の図から次のように求められる。

$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$、 $\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$ など



三角定規を

思い出そう

（覚えとく）

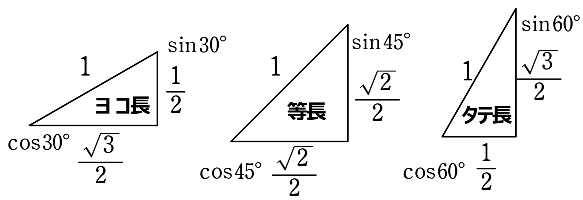
よって表のようにまとめられる。

θ	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ or $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ or $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$
$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ or $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

斜辺が１の形も覚えておこう

タカ　サイン　高さイン

ヨ　コサイン　横サイン



図形と計量【正弦・余弦・正接】 p.134～138

青チャートⅠ：例題133～136

□三角比の表

三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値はθ に対して決まっている。

三角比の表は，1° ごとの角 θ について，三角比の値を表にして載せてある。この表の値は，小数第 5 位を四捨五入して小数第 4 位まで示したものである。三角比の表を用いるときは，表の値を近似値であるが三角比の値として扱い，たとえば

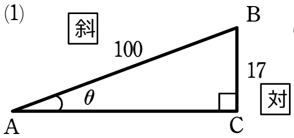
$\sin 25^\circ = 0.4226$，$\cos 28^\circ = 0.8829$，$\tan 32^\circ = 0.6249$

として等号でかくものとする。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
⋮	⋮	⋮	⋮
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
⋮	⋮	⋮	⋮

例４） 下の図における θ のおよその大きさを，三角比の表を用いて求めよ。解答

(1)



$\sin 9^\circ = 0.1564$ (-0.0136)
$\sin 10^\circ = 0.1736$ ($+0.0036$)
$\sin 11^\circ = 0.1908$ ($+0.0208$)

近いものを選ぶ

(1) $\sin\theta = 0.17$

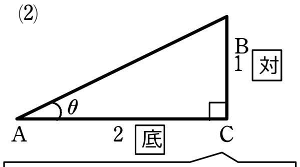
三角比の表から

最も近い鋭角を

求めると

$\theta \fallingdotseq 10^\circ$

(2)



$\tan 26^\circ = 0.4877$ (-0.0123)
$\tan 27^\circ = 0.5095$ ($+0.0095$)
$\tan 28^\circ = 0.5317$ ($+0.0317$)

近いものを選ぶ

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{2} = 0.5$

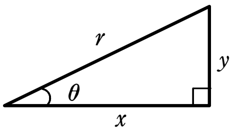
三角比の表から

最も近い鋭角を

求めると

$\theta \fallingdotseq 27^\circ$

□三角比の利用（三角比を用いて辺の長さを求める）



覚えとくと楽だが作るのも簡単

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$　$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

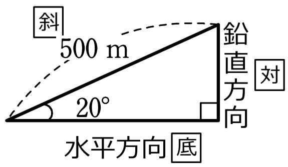
$y = r\sin\theta$　$x = r\cos\theta$　$y = x\tan\theta$

【長さを求める際の基本的方針】
① 斜辺・対辺・底辺を確認
② 長さがわかっている辺(長さを与えられた辺)と長さを求める辺がどこかを確認
③ どの三角比の定義を用いるか確認
④ 立てた式に三角比の値を代入して解く

高さはサインと斜辺　横はコサインと斜辺　底辺対辺ならタンジェント

練習５） 傾斜角 20° の坂をまっすぐに 500 m 登るとき，
鉛直方向に何 m 上がることになるか。
また，水平方向に何 m 進むことになるか。
1 m 未満は四捨五入して求めよ。

補足 重力の働く方向を鉛直方向といい
水平方向は鉛直方向に垂直な方向である。



図を書く習慣をつけよう。
その際、題意を正確に図に表そう。

解答 鉛直方向，水平方向の移動距離を，それぞれ x m，y m とすると

斜辺と対辺を用いるのはサイン　三角比の値を代入

$x = 500 \times \sin 20^\circ = 500 \times 0.3420 = 171$

$y = 500 \times \cos 20^\circ = 500 \times 0.9397 = 469.85 \fallingdotseq 470$

四捨五入して答える

斜辺と対辺を用いるのはコサイン　三角比の値を代入

よって，鉛直方向に 171 m，水平方向に 470 m

注意 求めた値が間違っていたり、四捨五入で誤差が生じることがあるため、与えられた数値を使い回すこと。

図形と計量【正弦・余弦・正接】 p.134～138

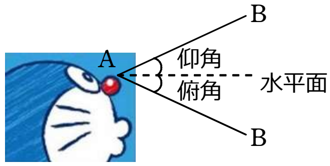
青チャートⅠ：例題133～136

<補足> 測量などで，点 A から点 B を見るとき，

A を通る水平面と AB とのなす角を，

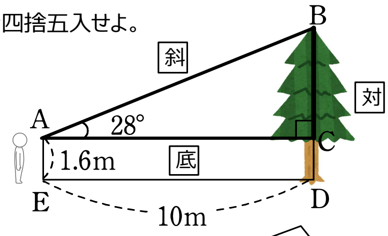
B が水平面より上にあるならば **仰角(ぎょうかく)** といい，

下にあるならば **俯角(ふかく)** という。



例題２） 木の根もとから水平に 10 m 離れた地点で，木の先端の仰角を測ったところ，28° であった。

目の高さを 1.6 m として，木の高さを求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入せよ。



解答 右の図において底辺・対辺に注目すると

$\mathrm{BC}=\mathrm{AC}\tan 28^\circ=10\times 0.5317$

$=5.317$ $\therefore$ $\mathrm{BC}=5.317$

よって，木の高さ BD は

$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}+\mathrm{CD}$

$=5.317+1.6=6.917\fallingdotseq 6.9$

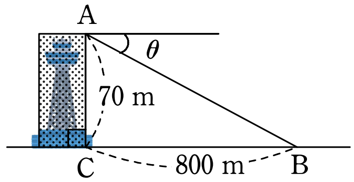
答 6.9 m

方針 まず，目の位置より上にある部分の木の高さを求める。

問１） 地点 B は地点 A よりも標高が 70 m 低く，

両地点間の水平距離は 800 m である。

A から B を見たとき，俯角は約何度か。



解答 俯角を θ とすると，右の図から

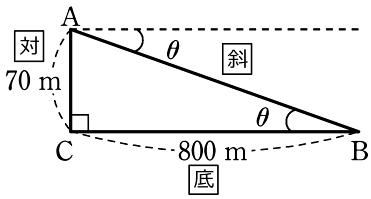
$\tan\theta=\dfrac{70}{800}=0.0875$

底辺と対辺を用いるのはタンジェント

三角比の表から $\tan 5^\circ=0.0875$

よって $\theta\fallingdotseq 5^\circ$

ゆえに，俯角は 約 5°

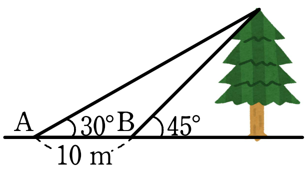


例題） 平地に立っている木の高さを知るために，木の前方の地点A から

測った木の頂点の仰角が 30°，A から木に向かって10 m 近づいた

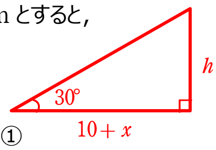
地点 B から測った仰角が 45° であった。木の高さを求めよ。

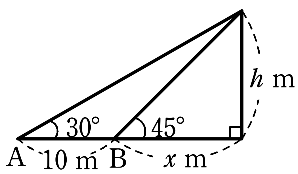
【青チャート数学Ⅰ基本例題１３５類題】



解答 木の高さを h m，木の根元と B との距離を x m とすると，

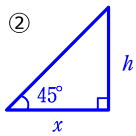
$\tan 30^\circ=\dfrac{h}{10+x}$ から





$h=(10+x)\tan 30^\circ=(10+x)\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ …… ①

また，$\tan 45^\circ=\dfrac{h}{x}$ から $h=x\tan 45^\circ=x$ …… ②



別解 直角二等辺三角形なので $x=h$

①，② から $h=(10+h)\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって $\sqrt{3}h=10+h$ ゆえに $(\sqrt{3}-1)h=10$

したがって $h=\dfrac{10}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{10(\sqrt{3}+1)}{2}=5(\sqrt{3}+1)$ (m)

特別角は表を使わなくても計算できる。また，「四捨五入せよ」などの指示があれば近似値を用いる。無ければそのまま。

三角比表

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0°	0.0000	1.0000	0.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175
2°	0.0349	0.9994	0.0349
3°	0.0523	0.9986	0.0524
4°	0.0698	0.9976	0.0699
5°	0.0872	0.9962	0.0875
6°	0.1045	0.9945	0.1051
7°	0.1219	0.9925	0.1228
8°	0.1392	0.9903	0.1405
9°	0.1564	0.9877	0.1584
10°	0.1736	0.9848	0.1763
11°	0.1908	0.9816	0.1944
12°	0.2079	0.9781	0.2126
13°	0.2250	0.9744	0.2309
14°	0.2419	0.9703	0.2493
15°	0.2588	0.9659	0.2679
16°	0.2756	0.9613	0.2867
17°	0.2924	0.9563	0.3057
18°	0.3090	0.9511	0.3249
19°	0.3256	0.9455	0.3443
20°	0.3420	0.9397	0.3640
21°	0.3584	0.9336	0.3839
22°	0.3746	0.9272	0.4040
23°	0.3907	0.9205	0.4245
24°	0.4067	0.9135	0.4452
25°	0.4226	0.9063	0.4663
26°	0.4384	0.8988	0.4877
27°	0.4540	0.8910	0.5095
28°	0.4695	0.8829	0.5317
29°	0.4848	0.8746	0.5543
30°	0.5000	0.8660	0.5774
31°	0.5150	0.8572	0.6009
32°	0.5299	0.8480	0.6249
33°	0.5446	0.8387	0.6494
34°	0.5592	0.8290	0.6745
35°	0.5736	0.8192	0.7002
36°	0.5878	0.8090	0.7265
37°	0.6018	0.7986	0.7536
38°	0.6157	0.7880	0.7813
39°	0.6293	0.7771	0.8098
40°	0.6428	0.7660	0.8391
41°	0.6561	0.7547	0.8693
42°	0.6691	0.7431	0.9004
43°	0.6820	0.7314	0.9325
44°	0.6947	0.7193	0.9657
45°	0.7071	0.7071	1.0000

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
45°	0.7071	0.7071	1.0000
46°	0.7193	0.6947	1.0355
47°	0.7314	0.6820	1.0724
48°	0.7431	0.6691	1.1106
49°	0.7547	0.6561	1.1504
50°	0.7660	0.6428	1.1918
51°	0.7771	0.6293	1.2349
52°	0.7880	0.6157	1.2799
53°	0.7986	0.6018	1.3270
54°	0.8090	0.5878	1.3764
55°	0.8192	0.5736	1.4281
56°	0.8290	0.5592	1.4826
57°	0.8387	0.5446	1.5399
58°	0.8480	0.5299	1.6003
59°	0.8572	0.5150	1.6643
60°	0.8660	0.5000	1.7321
61°	0.8746	0.4848	1.8040
62°	0.8829	0.4695	1.8807
63°	0.8910	0.4540	1.9626
64°	0.8988	0.4384	2.0503
65°	0.9063	0.4226	2.1445
66°	0.9135	0.4067	2.2460
67°	0.9205	0.3907	2.3559
68°	0.9272	0.3746	2.4751
69°	0.9336	0.3584	2.6051
70°	0.9397	0.3420	2.7475
71°	0.9455	0.3256	2.9042
72°	0.9511	0.3090	3.0777
73°	0.9563	0.2924	3.2709
74°	0.9613	0.2756	3.4874
75°	0.9659	0.2588	3.7321
76°	0.9703	0.2419	4.0108
77°	0.9744	0.2250	4.3315
78°	0.9781	0.2079	4.7046
79°	0.9816	0.1908	5.1446
80°	0.9848	0.1736	5.6713
81°	0.9877	0.1564	6.3138
82°	0.9903	0.1392	7.1154
83°	0.9925	0.1219	8.1443
84°	0.9945	0.1045	9.5144
85°	0.9962	0.0872	11.4301
86°	0.9976	0.0698	14.3007
87°	0.9986	0.0523	19.0811
88°	0.9994	0.0349	28.6363
89°	0.9998	0.0175	57.2900
90°	1.0000	0.0000	なし