図形と計量【拡張】　p.142～145

青チャートⅠ：例題139

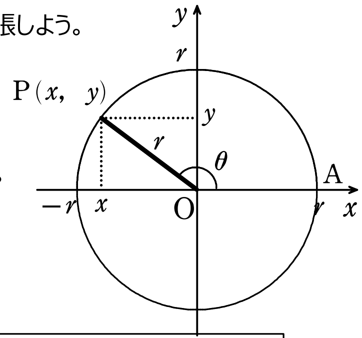
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】三角比で考える角度を１８０°まで拡張し、条件に応じた問題に対応しよう。

□三角比の拡張

ここまでは，直角三角形を用いて鋭角（ $0^\circ<\theta<90^\circ$ の範囲）の三角比を考えたが，座標を用いた三角比の定義によって，三角比を $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の角にまで拡張しよう。

○座標を用いた三角比の定義



右の図のように，座標平面上において原点 O を中心とする半径 r の円をかき，この円と x 軸の正の部分との交点を A とする。

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ の範囲にある θ に対して，$\angle AOP=\theta$ となる点 P をこの円上にとり，点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

このとき，θ の三角比を次の式で定義する。

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y\text{座標}}{\text{半径}},\quad \cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x\text{座標}}{\text{半径}},\quad \tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{y\text{座標}}{x\text{座標}}$$

これまでは $\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$

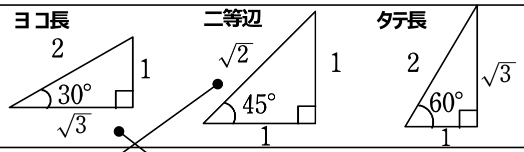
$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$

$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{\text{対辺}}{\text{底辺}}$

θ の範囲を $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ に広げた場合も，三角比 $\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値は　，円の半径 r に関係なく，いずれも<u>角 θ の大きさだけで定まる</u>。

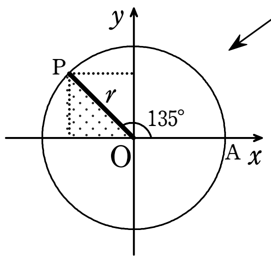
注意 $\theta=90^\circ$ のときは $x=0$ であるから，$\tan\theta$ は　定義されない。
したがって，$\tan\theta$ と書いたときには $\theta\fallingdotseq90^\circ$ であるものとする。

【おさらい：直角三角形の辺の比】

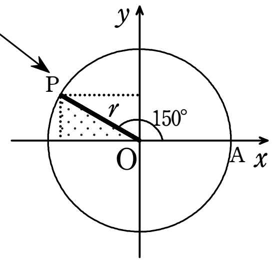


練習１２） 次の角の正弦，余弦，正接の値を，下の図などを用いて求めよ。

(1)　135°



(2)　150°



解答 (1)　$r=\sqrt{2}$ とすると，

点 P の座標は $(-1,\ 1)$

$\sin135^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\cos135^\circ=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，

$\tan135^\circ=\dfrac{1}{-1}=-1$

三角比の値と半球の半径の大きさ

深める x, y, z の間に成り立つ関係式を考えてみよう

(2)　$r=2$ とすると，

点 P の座標は $(-\sqrt{3},\ 1)$

$\sin150^\circ=\dfrac{1}{2}$，

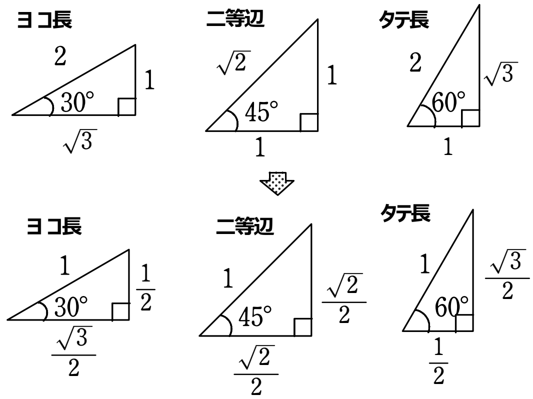
$\cos150^\circ=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$\tan150^\circ=\dfrac{1}{-\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

図形と計量【拡張】　p.142～145

青チャートⅠ：例題139

【重要：斜辺が１の直角三角形の辺の比】



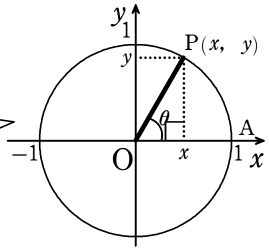
拡張した三角比の定義において，$r=1$ とすると　$\sin\theta = y$，$\cos\theta = x$ である。点 P は原点 O を中心とする半径 1 の円（**単位円**）上にあるから

$\sin\theta = \dfrac{y}{1} = y =$ **高さ**，

$\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x =$ **横**，

タカ･サイン　高さイン
ヨ･コサイン　横サイン

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} =$ **傾き**



また、単位円の性質上横の長さと高さは半径以上にはならないので

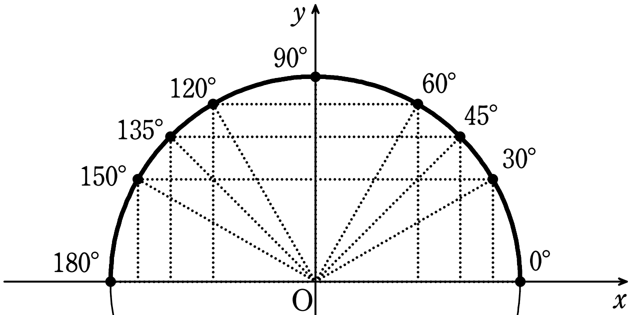
半円のとき　$0 \leqq y \leqq 1$，$-1 \leqq x \leqq 1$

x 軸をコサイン軸
y 軸を サイン軸と見ることもできる

よって，次のことがいえる。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき（ x 軸より上側の半円のみを見る）

$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$



直角三角形を書き足して
辺の長さを確認しよう

長い → $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

中くらい → $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

短い → $\dfrac{1}{2}$

ヨコ長・タテ長

θ	30°	60°	120°	150°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

二等辺

θ	45°	135°
$\sin\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\cos\theta$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$

軸上

θ	0°	90°	180°
$\sin\theta$	0	1	0
$\cos\theta$	1	0	-1

半径に等しい

対称性と入れ替わりが生じる　　二等辺なので縦横同じ

サインは大きくなって、小さくなって

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

マイナスゾーン

コサインは小さくなっていく

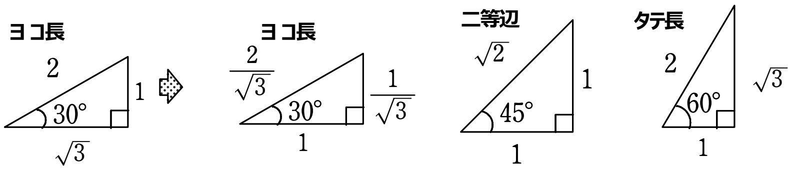
まとめると
サイン・コサインは
順番に値が変化
していく
（$1=\dfrac{\sqrt{4}}{2}$ とする
とわかりやすい）

図形と計量【拡張】　p.142〜145

青チャートⅠ：例題139

【底辺が１の直角三角形の辺の比】

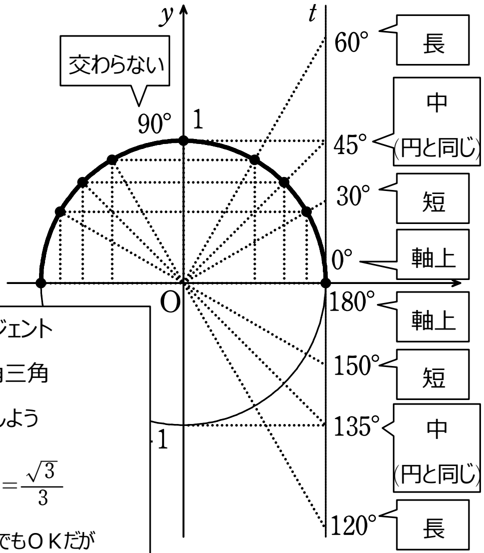
ヨコ長の直角三角形の
各辺を $\sqrt{3}$ で割ると
底辺が１になる

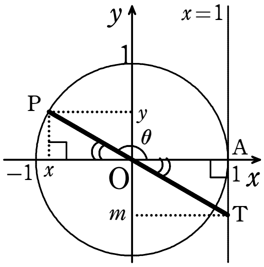


右の図のように，単位円上に $\angle \mathrm{AOP}=\theta$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。$\theta \fallingdotseq 90^\circ$ のとき，直線 OP と直線 $x=1$（タンジェント軸） の交点を $\mathrm{T}(1,\ m)$ とすると，

$\tan\theta$ は $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{m}{1}=m$ と表される。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\theta \fallingdotseq 90^\circ$ のとき，
m のとる値の範囲は実数全体である。
したがって，$\tan\theta$ のとる値の範囲は実数全体である。





各点と中心を通る線をタンジェント軸に向けて引き、できる直角三角形を見て、辺の長さを確認しよう

長い → $\sqrt{3}$
中くらい → 1
短い → $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$
どちらでもＯＫだが
逆数とわかりやすい方が

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

交わらないので、値が存在しない

逆数　マイナスゾーン

大きくなる　符号以外は左右対称　大きくなる

サイン・コサインとタンジェントの表をまとめると次のようになる。埋められるようになっておこう。

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	$-\dfrac{1}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
どちらでもＯＫ

※　出来れば表を暗記するだけでなく、図から必要な値だけでも出せるようにしておこう！

図形と計量【拡張】 p.142～145

青チャートⅠ：例題139

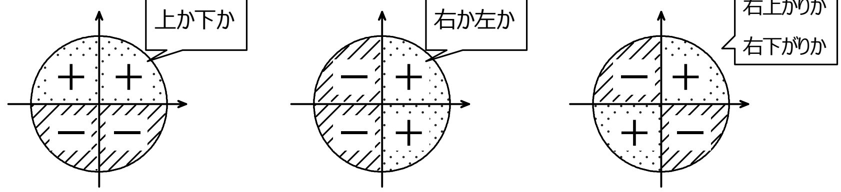
三角比の符号とそのとる値の範囲について，次のようにまとめられる。

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°	とる値の範囲
$\sin\theta$	0	＋	1	＋	0	$0 \leqq \sin\theta \leqq 1$
$\cos\theta$	1	＋	0	－	-1	$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$
$\tan\theta$	0	＋		－	0	すべての実数値

表の符号や数値と見比べてみよう

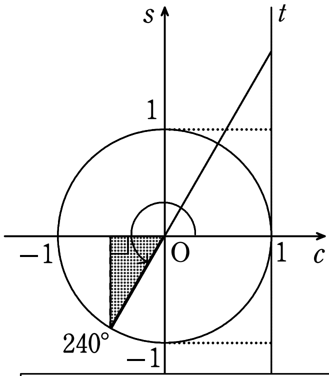
これを図形で確認すると、象限ごとに次のようになる。

高さ（タカ・サイン）　**横（ヨ・コサイン）**　**傾き（タンジェント）**



深める　θ が 0° から 180° まで変わるとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値は，それぞれどのように変わるか説明してみよう。

注意 数学Ⅱの三角関数では範囲が 180° 以上や負の角にも拡張される（半円ではなく全円になる）



サイン・コサイン

長い → $\frac{\sqrt{3}}{2}$

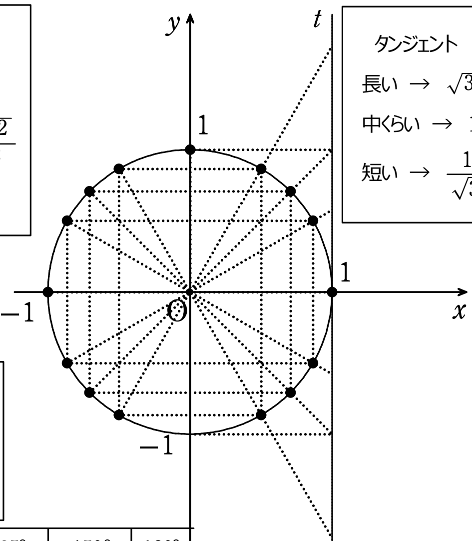
中くらい → $\frac{\sqrt{2}}{2}$

短い → $\frac{1}{2}$

縦長で負の方向なので　$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

横短くて負の方向なので　$\cos\theta = -\frac{1}{2}$

右上がりで　縦長なので　$\tan\theta = \sqrt{3}$



タンジェント

長い → $\sqrt{3}$

中くらい → 1

短い → $\frac{1}{\sqrt{3}}$

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

どちらでもＯＫ

θ	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\theta$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

以上から，θ に範囲がないと次のことも成り立つ。

$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$，　$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$，　$\tan\theta$ の値の範囲は実数全体