図形と計量【相互関係】 p.139～140, 148～149

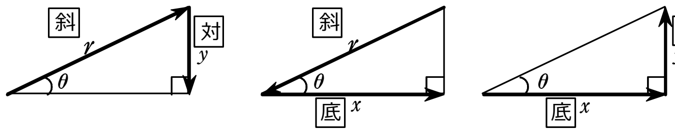
青チャートⅠ：例題137, 142, 144

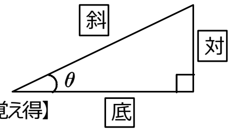
【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】相互関係の式を用いて、他の三角比の値を求めよう

三角比の定義

$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$　　$\cos\theta=\dfrac{x}{r}=\dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$　　$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\text{対辺}}{\text{底辺}}$





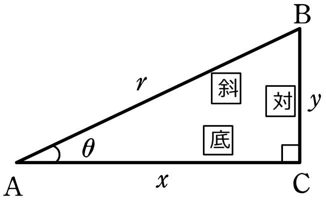
【覚え得】

直角の向かいが**「斜辺」**

注目する角の向かいが**「対辺」**

残りの辺が**「底辺」**

□三角比の相互関係



右の図の直角三角形 ABC において

$\cos\theta=\dfrac{x}{r}$，　$\sin\theta=\dfrac{y}{r}$ より

$x=r\cos\theta$，　$y=r\sin\theta$

である。一方で $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$ であるから　代入すると $\boxed{\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

となる。また，三平方の定理により　$x^2+y^2=r^2$　であるから

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2$　すなわち　$r^2(\cos\theta)^2+r^2(\sin\theta)^2=r^2$

が成り立つ。よって

$(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2=1$

$\therefore\ \boxed{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$

<注意>　$(\sin\theta)^2$，$(\cos\theta)^2$，$(\tan\theta)^2$を，
それぞれ $\sin^2\theta$，$\cos^2\theta$，$\tan^2\theta$ と書く。
$\sin\theta^2$ はθの２乗と読み取られる

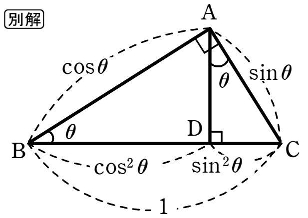
となる。また，この等式の両辺を$(\cos\theta)^2$で割ると

$$1+\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2=\frac{1}{(\cos\theta)^2}$$

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

$\therefore\ \boxed{1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}}$　となる。

別解



以上から，三角比の間に次の関係が成り立つ。

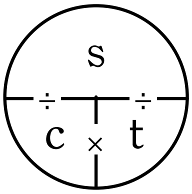
三角比の相互関係

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　　　3　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

2　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

2は$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ や
$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ で
用いることが多い

【覚え方】

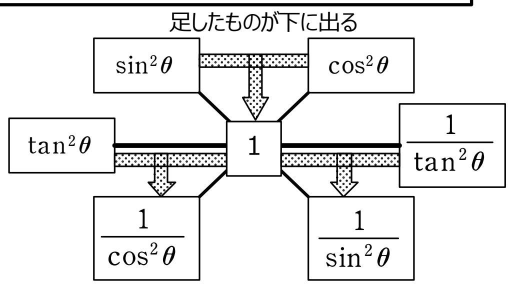


求めたい三角比を

指で隠すと必要な式が出る

$\sin\theta=\cos\theta\times\tan\theta$　など

「スイスでちょっとティータイム」
$\sin\theta$　$\cos\theta$　$\tan\theta$



図形と計量【相互関係】 p.139～140, 148～149

青チャートⅠ：例題 137, 142, 144

例題３） $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，θ は鋭角 とする。

王道の解き方

解答 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=+\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{3}\div\dfrac{\sqrt{5}}{3}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

① サイン・コサインが与えられたら、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して方程式を解く

θ が鋭角のときは $\sin\theta$ も $\cos\theta$ も $\tan\theta$ も正の値

② タンジェントは $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ または $\tan\theta=\sin\theta\div\cos\theta$ に代入して計算

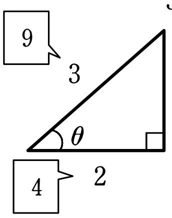
繁分数式 $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}=\dfrac{\frac{2}{3}\times3}{\frac{\sqrt{5}}{3}\times3}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ でも処理できるように

簡易版の解き方（検算や答えのみのときに）

例題３） $\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。ただし，θ は鋭角 とする。

解答 $\cos\theta=\dfrac{2}{3}=\dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}}$ から

① 適当な直角三角形を書いて該当する辺に値を書き込む



$\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

② 残りの１辺を三平方の定理で求める

③ 符号に注意しながら定義を用いて求める

θ が鋭角のときは $\sin\theta$ も $\cos\theta$ も $\tan\theta$ も正の値

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

図形と計量【相互関係】 p.139～140, 148～149

青チャートⅠ：例題 137, 142, 144

例題４） $\tan\theta = 2\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。ただし，θ は鋭角 とする。

θ が鋭角のときは、$\sin\theta$ も $\cos\theta$ も $\tan\theta$ も正の値

王道の解き方

解答　$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から　$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1+(2\sqrt{2})^2 = 9$

（$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{9}{1}$ なのでひっくり返して）　よって　$\cos^2\theta = \dfrac{1}{9}$

$\cos\theta > 0$ であるから　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta$

$= 2\sqrt{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

① タンジェントが与えられたら、$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入して方程式を解く

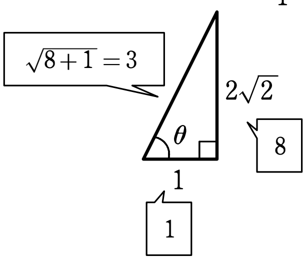
② $\sin\theta$ は $\sin\theta = \cos\theta \times \tan\theta$ に代入して計算

例題４） $\tan\theta = 2\sqrt{2}$ のとき，$\cos\theta$ と $\sin\theta$ の値を求めよ。 ただし，θ は鋭角 とする。

θ が鋭角のときは $\sin\theta$ も $\cos\theta$ も $\tan\theta$ も正の値

簡易版の解き方（検算や答えのみのときに）

解答　$\tan\theta = 2\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{1}$



① 適当な直角三角形を書いて該当する辺に値を書き込む

② 残りの１辺を三平方の定理で求める

③ 符号に注意しながら定義を用いて求める

$\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

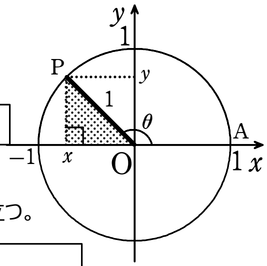
図形と計量【相互関係】 p.139～140, 148～149

青チャートⅠ：例題 137, 142, 144

□三角比の相互関係

単位円上に $\angle \mathrm{AOP}=\theta$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ をとると，x，y は次のようになる。

$$\sin\theta=y,\ \cos\theta=x,\ \tan\theta=\frac{y}{x}$$



また，三平方の定理などを用いると，　$x^2+y^2=1^2$ が常に成り立つことがわかる。

原点中心半径１の円を表す式でもある

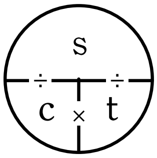
したがって，三角比の相互関係は，範囲を拡張した角 θ についても，そのまま成り立つ。

三角比の相互関係

1　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

3　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$



例題７）　$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	＋	＋
$\cos\theta$	＋	－
$\tan\theta$	＋	－

$\sin\theta$ が正の数のときは
鋭角、鈍角、両方の可能性がある
⇒ $\cos\theta$ ，　$\tan\theta$ の符号が異なる

$\sin\theta$ が正の数のときは
鋭角、鈍角
場合分けをして答える

王道の解き方

① θの範囲から符号を確認する

解答　$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ から，

$0^\circ<\theta<90^\circ$ または $90^\circ<\theta<180^\circ$ である。

$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき　$\cos\theta>0$，$\tan\theta>0$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき　$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$

② サイン与えられたら、$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して方程式を解く

③ タンジェントは　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$　に代入して計算

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{4}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから

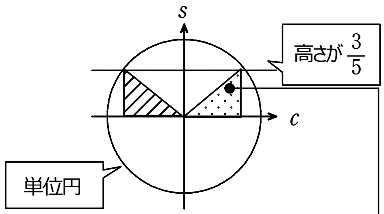
$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{5}\div\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{4}$$

簡易版の解き方

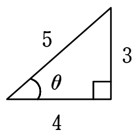
① $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ と$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ から，

答えの出方を確認する（この場合は２種類出る）



② $\sin\theta=\dfrac{3}{5}=\dfrac{\text{対辺}}{\text{斜辺}}$　なので，

該当の辺の値を決めて残りの辺を計算する



$0^\circ<\theta<90^\circ$ のとき　$\cos\theta>0$，$\tan\theta>0$

なので　$\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\tan\theta=\dfrac{3}{4}$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき　$\cos\theta<0$，$\tan\theta<0$

なので　$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$，$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

図形と計量【相互関係】 p.139～140, 148～149

青チャートⅠ：例題137, 142, 144

問3＋α） $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。次のように角 θ の三角比の値が1つ与えられたとき，他の2つの三角比の値を求めよ。

(1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$

θ	鋭角	鈍角
$\sin\theta$	＋	＋
$\cos\theta$	＋	−
$\tan\theta$	＋	−

(2) $\tan\theta = -2$

王道の解き方

(1) $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ から，

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ なので

$\sin\theta > 0$, $\tan\theta < 0$ 。

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$= 1 - \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{8}{9}$

$\sin\theta > 0$ であるから

$\sin\theta = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \div \left(-\dfrac{1}{3}\right)$

$= -2\sqrt{2}$

① θの範囲から符号を確認する

② コサインが与えられたら、$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に
タンジェントが与えられたら、$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に
代入して方程式を解く

③ 最後のタンジェントは
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ または
$\tan\theta = \sin\theta \div \cos\theta$ に
代入して計算

③ 最後の$\sin\theta$ は
$\sin\theta = \cos\theta \times \tan\theta$ に
代入して計算

(2) $\tan\theta = -2$ から，

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ なので

$\cos\theta < 0$, $\sin\theta > 0$ 。

$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + (-2)^2 = 5$

よって $\cos^2\theta = \dfrac{1}{5}$

$\cos\theta < 0$ であるから

$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{1}{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta$

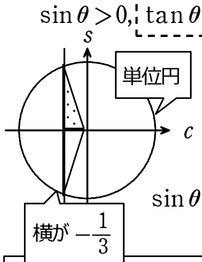
$= -2 \times \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

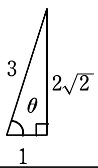
簡易版の解き方

① $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ と$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ から，
答えの出方を確認する
(この場合は x 座標が負の方に１つ出る)

$\cos\theta < 0$ から，$90^\circ < \theta < 180^\circ$ なので

$\sin\theta > 0$, $\boxed{\tan\theta < 0}$





$\sin\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\boxed{\tan\theta = -2\sqrt{2}}$

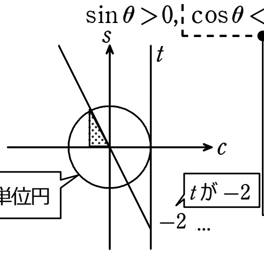
② $\cos\theta = \dfrac{-1}{3} = \dfrac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \dfrac{x\text{座標}}{\text{半径}}$ なので，
該当の辺の値を決めて残りの辺を計算する

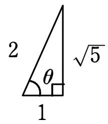
マイナスは無視して三平方でも良い

① $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ と$\tan\theta = -2$ から，
答えの出方を確認する
(この場合は x 座標が負の方に１つ出る)

$\tan\theta < 0$ から，$90^\circ < \theta < 180^\circ$ なので

$\sin\theta > 0$, $\boxed{\cos\theta < 0}$





$\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\boxed{\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

② $\tan\theta = \dfrac{2}{-1} = \dfrac{\text{対辺}}{\text{底辺}} = \dfrac{y\text{座標}}{x\text{座標}}$ なので，
該当の辺の値を決めて残りの辺を計算する