図形と計量【余角・補角】 p.141, 146

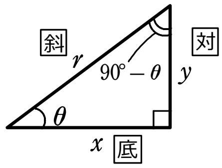
青チャートⅠ：例題 138, 140

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】余角の公式を使いこなそう

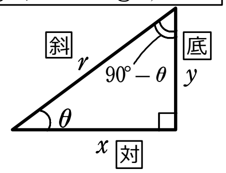
□ $90^\circ-\theta$ の三角比

$90^\circ-\theta$ を「**余角** (complementary angle, co−angle)」という



$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\sin(90^\circ-\theta)$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\cos(90^\circ-\theta)$$



また $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$，$\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{x}{y}$ なので $\tan\theta\times\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{y}{x}\times\dfrac{x}{y}=1$

逆数の関係

であるから，鋭角 θ について，次の関係が成り立つ。

$90^\circ-\theta$ の三角比

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(90^\circ-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

$\sin(90^\circ-\theta)$ のように 90° の奇数倍が 出てきているときは 変化が生じる

足して 90°（○＋△＝ 90°）のとき

$\sin\bigcirc=\cos\triangle$

$\cos\bigcirc=\sin\triangle$

$\tan\bigcirc=\dfrac{1}{\tan\triangle}$

例５）

(1) $\sin 62^\circ=\cos 28^\circ$　　$62^\circ+28^\circ=90^\circ$

(2) $\cos 53^\circ=\sin 37^\circ$　　$53^\circ+37^\circ=90^\circ$

(3) $\tan 85^\circ=\dfrac{1}{\tan 5^\circ}$ から　　$85^\circ+5^\circ=90^\circ$

$\tan 85^\circ\tan 5^\circ=1$

足して90°なら変化する

表を見てもサインとコサインの関係は分かる

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
25°	0.4226	0.9063	0.4663
65°	0.9063	0.4226	2.1445

練習１０） 次の三角比を 45° 以下の角の三角比で表せ。

このような処理をすることで三角比を統一したり、三角比の表の範囲を狭くできる

(1) $\sin 74^\circ=\sin(90^\circ-16^\circ)=\cos 16^\circ$

(2) $\cos 49^\circ=\cos(90^\circ-41^\circ)=\sin 41^\circ$

(3) $\tan 65^\circ=\tan(90^\circ-25^\circ)=\dfrac{1}{\tan 25^\circ}$

$(90^\circ-\theta)$ なので 三角比にも変化が生じる

問２） △ABC の 3 つの内角 ∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$$

$\boxed{\text{解答}}$ $A+B+C=180^\circ$ であるから　　$A=180^\circ-(B+C)$

よって　$\dfrac{A}{2}=90^\circ-\dfrac{B+C}{2}$

ゆえに　$\sin\dfrac{A}{2}=\sin\left(90^\circ-\dfrac{B+C}{2}\right)=\cos\dfrac{B+C}{2}$

図形と計量【余角・補角】 p.141，146

青チャートⅠ：例題 138, 140

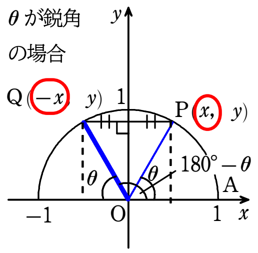
□$180°-\theta$ の三角比

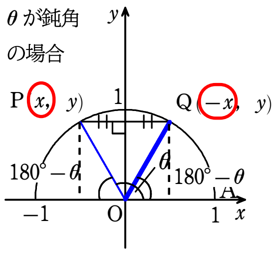
$180°-\theta$ を「**補角** (supplementary angle)」という

右の図のように，原点 O を中心とする半径 1 の半円上に $\angle AOP=\theta$ となる点 $P(x,\ y)$ をとる。

y 軸に関して点 P と対称な点 Q をとると，Q の座標は $(-x,\ y)$ である。

また，$\angle AOQ=180°-\theta$ である。





よって，$180°-\theta$ の三角比は，次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\sin(180°-\theta)&=y=\sin\theta\\ \cos(180°-\theta)&=-x=-\cos\theta\\ \tan(180°-\theta)&=\frac{y}{-x}=-\tan\theta\end{aligned}\right\}$$

θ と $180°-\theta$ について
高さ（タカサイン）は変わらない
横（ヨコサイン）は左右対称（**符号のみ変化**）
傾き（タンジェント）は上がり下がりが変わる（**符号のみ変化**）

一般に，$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき，次の関係が成り立つ。

$180°-\theta$ （補角）の三角比

$$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$$
$$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$$
$$\tan(180°-\theta)=-\tan\theta$$

足して 180° （○＋□＝ 180° ）のとき
sin○＝sin□
cos○＝−cos□
tan○＝−tan□
符号のみの変化！

この公式を用いると，鈍角の三角比を，鋭角の三角比で表すことができる。

別プリントでも確認しよう

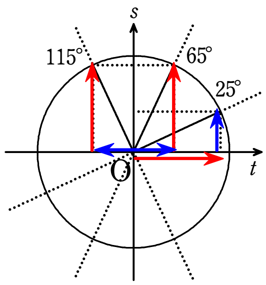
例７改） 次の値を 45° より小さくせよ。

(1) $\sin115°=\sin(180°-65°)=\sin65°$
$\qquad=\sin(90°-25°)=\cos25°$

(2) $\cos115°=\cos(180°-65°)=-\cos65°$
$\qquad=-\cos(90°-25°)=-\sin25°$

(3) $\tan115°=\tan(180°-65°)=-\tan65°$
$\qquad=-\tan(90°-25°)=-\dfrac{1}{\tan25°}$

cos115° や tan115° は負の値
sin25° や sin25° は正の値



練習） 次の式の値を求めよ。

(1) $\cos80°\sin10°+\cos10°\sin80°$

45° 以下に統一

$=\cos(90°-10°)\cdot\sin10°+\cos10°\cdot\sin(90°-10°)$
$=\sin10°\cdot\sin10°+\cos10°\cdot\cos10°$
$=\sin^2 10°+\cos^2 10°=1$

式の中で変形しづらければ
別なところで計算しておく
$\cos80°=\cos(90°-10°)=\sin10°$
$\sin80°=\sin(90°-10°)=\cos10°$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ （θ は同じ角度であれば何でもＯＫ）

(2) $(\sin70°+\sin20°)^2-2\tan20°\cos^2 20°$

45° 以下＋サイン・コサインのみに統一

$=\{\sin(90°-20°)+\sin20°\}^2-2\cdot\dfrac{\sin20°}{\cos20°}\cdot\cos^2 20°$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ （θ は同じ角度であれば何でもＯＫ）

$=(\cos20°+\sin20°)^2-2\sin20°\cos20°$

展開

$=(\cos^2 20°+2\sin20°\cos20°+\sin^2 20°)-2\sin20°\cos20°$
$=\sin^2 20°+\cos^2 20°=1$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ （θ は同じ角度であれば何でもＯＫ）

図形と計量【余角・補角】 p.141, 146

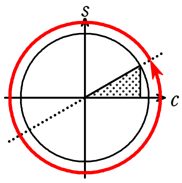
青チャートⅠ：例題 138, 140

□三角関数で成り立つ等式（数学Ⅱの内容）

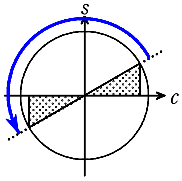
三角関数のもつ周期性は，次の等式で表される。

$$\begin{cases} \sin(\theta+360^\circ n)=\sin\theta \\ \cos(\theta+360^\circ n)=\cos\theta \\ \tan(\theta+360^\circ n)=\tan\theta \end{cases}$$

ただし，n は整数



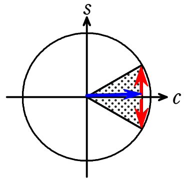
$$\begin{cases} \sin(\theta+180^\circ)=-\sin\theta \\ \cos(\theta+180^\circ)=-\cos\theta \\ \tan(\theta+180^\circ)=\tan\theta \end{cases}$$



要は周期（$\sin\theta$ や $\cos\theta$ なら 360°，$\tan\theta$ なら 180°）の分だけ回転したら同じになるということ

三角関数のグラフの対称性は，次の等式で表される。

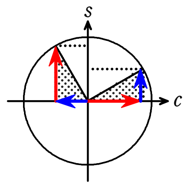
$$\begin{cases} \sin(-\theta)=-\sin\theta \\ \cos(-\theta)=\cos\theta \\ \tan(-\theta)=-\tan\theta \end{cases}$$



$-\theta$ を負角（ふかく）という

サッ（sin）と出てくる　こする（cos）と消える

$$\begin{cases} \sin(\theta+90^\circ)=\cos\theta \\ \cos(\theta+90^\circ)=-\sin\theta \\ \tan(\theta+90^\circ)=-\dfrac{1}{\tan\theta} \end{cases}$$



180°系
90°×(偶数) は
変化しない

90°系
90°×(奇数) は
変化する

θ に 30° など代入して左辺と右辺を比べたとき
符号が同じになるならプラス、違うのならマイナスを付けよう

例） $\cos 290^\circ=\cos(20^\circ+270^\circ)=\cos(20^\circ+90^\circ\times3)=\sin 20^\circ$

$270^\circ=90^\circ\times3$ なので変化
$\cos 290^\circ$ は正，$\sin 20^\circ$ も正で
同符号なので＋

$\boxed{\text{別解}}$ $\cos 290^\circ=\cos(110^\circ+180^\circ)=-\cos 110^\circ=-\cos(20^\circ+90^\circ)=-(-\sin 20^\circ)=\sin 20^\circ$

問題６） 次の三角比の値を，小さい方から順に並べよ。ただし，三角比の表は用いないものとする。

$\cos 50^\circ$，$\cos 70^\circ$，$\sin 150^\circ$，$\sin 170^\circ$

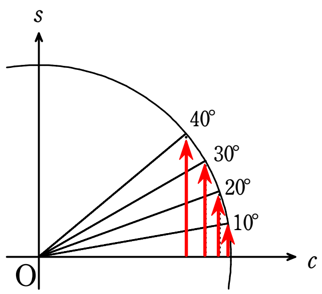
$\boxed{\text{解答}}$ $\cos 50^\circ=\cos(90^\circ-40^\circ)=\sin 40^\circ$

$\cos 70^\circ=\cos(90^\circ-20^\circ)=\sin 20^\circ$

$\sin 150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin 30^\circ$

$\sin 170^\circ=\sin(180^\circ-10^\circ)=\sin 10^\circ$

$\sin\theta$
高さの比較に
そろえる



$0^\circ\leqq\theta\leqq90^\circ$ のとき，θ が大きくなると $\sin\theta$ の値も大きくなる。

よって，$\sin 10^\circ$，$\sin 20^\circ$，$\sin 30^\circ$，$\sin 40^\circ$ の順に大きくなる。

したがって，与えられた三角比の値を小さい方から順に並べると

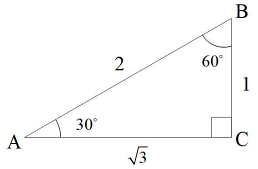
$\sin 170^\circ$，$\cos 70^\circ$，$\sin 150^\circ$，$\cos 50^\circ$

青チャートⅠ：例題 138, 140

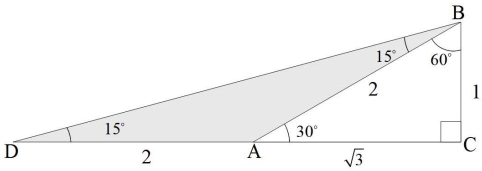
図形と計量【余角・補角】 p.141, 146

深める さらに特別な角の三角比

60° や 135° など特別な角の三角比の値はよく用いますね。
これらの特別な角以外に、一般的な図形から求められる三角比の値はないでしょうか？



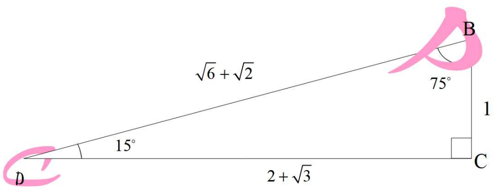
まずは $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形を用意します。この直角三角形は 辺の長さが $1:2:\sqrt{3}$ となりますね。



そこに 15° を等しい角とする二等辺三角形を図のように付け加えます。すると △BCD で三平方の定理を用いると,

$$BD=\sqrt{1^2+\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$$

となります。



△BCD に注目すると

$$\sin 15^\circ=\frac{BC}{BD}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ=\frac{CD}{BD}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

同様にして

$$\sin 75^\circ=\frac{CD}{BD}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{6-2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ=\frac{BC}{BD}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\left(180^\circ-\theta\right)=\sin\theta$$

$$\cos\left(180^\circ-\theta\right)=-\cos\theta$$

これらに補角の公式を適用すると

$$\sin 105^\circ=\sin\left(180^\circ-75^\circ\right)=\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 105^\circ=\cos\left(180^\circ-75^\circ\right)=-\cos 75^\circ=\frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

このようにして 15° や $75^\circ, 105^\circ$ といったさらに特別な角の三角比の値を求めることができます。
必ずおぼえなくてはいけないわけではないですが、おぼえておくと一手間減るでしょう。