図形と計量【対称式・交換式】

青チャートⅠ：例題 145～146

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】三角比を含む対称式、交代式の値を求めよう

青チャート数学Ⅰ基本例題１４５）

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $(0°<\theta<180°)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$　　(2) $\sin\theta-\cos\theta$，$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}$

【広島修道大】

解答 (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ の両辺を２乗すると

【重要】$\sin\theta\pm\cos\theta$ の形は２乗すること多し

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{2}$$

両辺を２で割る（ $\times\dfrac{1}{2}$ ）

ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$　……①

よって　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

掛けて負の数となるのは異符号のとき

(2) $0°<\theta<180°$ では $\sin\theta>0$ であるから，① より　$\cos\theta<0$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta>0$　……②

① から　$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$

$$=1-2\times\left(-\frac{1}{4}\right)$$

代入して計算

$$=\frac{3}{2}$$

よって，② から　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

また　$\tan\theta-\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

通分して分子を計算

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$

分子を因数分解

分かっている値を代入

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=-2\sqrt{3}$$

代入して計算

図形と計量【対称式・交換式】

青チャートⅠ：例題 145～146

例題） $0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 3$ のとき，次の式の値を求めよ。【名古屋学院大】

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin\theta + \cos\theta$

(3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$　　(4) $\dfrac{1}{\sin^3\theta} + \dfrac{1}{\cos^3\theta}$

解答 (1) $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$　タンジェントはサイン・コサインに統一

$= \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$　通分して分子を計算

$= \dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = 3$ であるから　$\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{3}{1}$　ひっくり返す

したがって　$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

(2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= 1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\cdot\dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{3}$

【重要】$\sin\theta \pm \cos\theta$ の形は 2 乗すること多し

したがって　$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \dfrac{5}{3}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$ であるから　鋭角のときはすべて正

$\sin\theta + \cos\theta > 0$

よって　$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{\dfrac{5}{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$

(3) $\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= \dfrac{\sqrt{15}}{3}\cdot\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{2\sqrt{15}}{9}$

(4) $\dfrac{1}{\sin^3\theta} + \dfrac{1}{\cos^3\theta} = \dfrac{\cos^3\theta + \sin^3\theta}{\sin^3\theta\cos^3\theta}$　通分して分子を計算

$= \dfrac{2\sqrt{15}}{9} \div \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

$= \dfrac{2\sqrt{15}}{9}\cdot 27$

$= 6\sqrt{15}$

青チャート数学Ⅰ重要例題１４６改）θ が $0^\circ<\theta<90^\circ$ かつ $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ を満たすとき，

$\cos\theta+\sin\theta$， $\tan\theta$ の値を求めよ。

【摂南大　改】

解答　$\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を 2 乗すると　$(\cos\theta-\sin\theta)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

$\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta=\dfrac{1}{4}$　　すなわち　$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{8}$

ここで　$(\cos\theta+\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\sin^2\theta$

$$=1+2\cdot\frac{3}{8}=\frac{7}{4}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ であるから

$\cos\theta+\sin\theta>0$

ゆえに　$\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

連立して

$$\begin{array}{rrl} & \cos\theta+\sin\theta= & \dfrac{\sqrt{7}}{2} \\ +) & \cos\theta-\sin\theta= & \dfrac{1}{2} \\ \hline & 2\cos\theta= & \dfrac{\sqrt{7}+1}{2} \end{array} \qquad \begin{array}{rrl} & \cos\theta+\sin\theta= & \dfrac{\sqrt{7}}{2} \\ -) & \cos\theta-\sin\theta= & \dfrac{1}{2} \\ \hline & 2\sin\theta= & \dfrac{-1+\sqrt{7}}{2} \end{array}$$

よって　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$，$\cos\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

これは $\cos\theta>0$，$\sin\theta>0$ をみたす

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

$$=\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}=\frac{8-2\sqrt{7}}{6}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

別解 1

$\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ から　$\cos\theta=\sin\theta+\dfrac{1}{2}$ ……①

① を $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ に代入して　$\sin^2\theta+\left(\sin\theta+\dfrac{1}{2}\right)^2=1$

ゆえに　$2\sin^2\theta+\sin\theta-\dfrac{3}{4}=0$

よって　$8\sin^2\theta+4\sin\theta-3=0$

これを $\sin\theta$ の 2 次方程式とみて， $\sin\theta$ について解くと

$$\sin\theta=\frac{-2\pm\sqrt{4+24}}{8}=\frac{-2\pm2\sqrt{7}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{4}$$

ここで $0^\circ<\theta<90^\circ$ より　$0<\sin\theta<1$ であるから

$$\sin\theta=\frac{-1+\sqrt{7}}{4}\quad\left(\because\ 2<\sqrt{7}<3\text{ より }\ 1<-1+\sqrt{7}<2\right)$$

このとき①から　$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

したがって　$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}+\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}$

$$=\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}=\frac{8-2\sqrt{7}}{6}=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$$

別解 2

$\theta=90^\circ$ とすると　$\cos90^\circ-\sin90^\circ=-1$ となり与式を満たさないから　$\theta\fallingdotseq90^\circ$

よって　$\cos\theta\fallingdotseq0$ であるから，与式の両辺を $\cos\theta$ で割って　$1-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{2\cos\theta}$

$1-\tan\theta=\dfrac{1}{2\cos\theta}$ であるから　$\dfrac{1}{\cos\theta}=2(1-\tan\theta)$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta$ から　$4(1-\tan\theta)^2=1+\tan^2\theta$

整理すると　$3\tan^2\theta-8\tan\theta+3=0$

$\tan\theta$ について解くと　$\tan\theta=\dfrac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より　$0<\sin\theta<1$ であり，

与式より $\cos\theta=\sin\theta+\dfrac{1}{2}$ であるから　　$0<\sin\theta<\cos\theta$

したがって　　$0<\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}<1$

ここで $2<\sqrt{7}<3$ より　$-3<-\sqrt{7}<-2$ なので

$6<4+\sqrt{7}<7,\ 1<4-\sqrt{7}<2$

$\therefore\ \ 2<\dfrac{4+\sqrt{7}}{3}<\dfrac{7}{3},\ \dfrac{1}{3}<\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}<\dfrac{2}{3}$

ゆえに　$\tan\theta=\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}$