図形と計量【正弦定理】 p.152〜154

青チャートⅠ：例題152

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】正弦定理を使いこなせるようになろう

○三角形の外接円と正弦

三角形の 3 つの頂点を通る円を，その三角形の 外接円 という。 △ABC の外接円の半径を R とする。

証明 [1] $0^\circ < A < 90^\circ$ のとき，右の図で線分BD は △ABC の外接円の直径とする。このとき，円周角と中心角の性質により，

＊1 つの弧に対する円周角の大きさは一定で，中心角の大きさの半分である。とくに，半円の弧に対する円周角の大きさは 90° である。

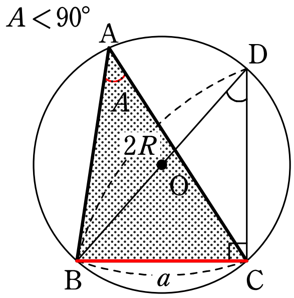
$\angle\mathrm{BDC} = \angle\mathrm{BAC} = A$

$\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$

が成り立つ。また，$\mathrm{BD} = 2R$ である。

よって，△BCD において $a = 2R\sin A$ すなわち $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

が成り立つ。



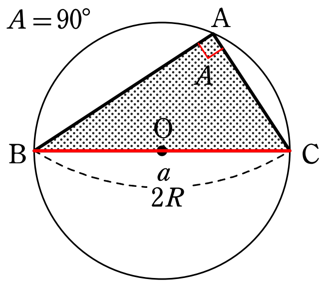
[2] $A = 90^\circ$ のとき

辺 BC は，△ABC の外接円の直径になる。

外接円の半径は R であるから，$a = 2R$ である。

一方，$\sin A = \sin 90^\circ = 1$ であるから，$a = 2R \times 1 = 2R\sin A$

すなわち $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ が成り立つ。



[3] $A > 90^\circ$ のとき 直径 BD を引くと $\angle\mathrm{BCD} = 90^\circ$

また，四角形 ABDC は円に内接するから

$A + \angle\mathrm{BDC} = 180^\circ$

＊ 円に内接する四角形では，向かい合う角の和は 180° になる。

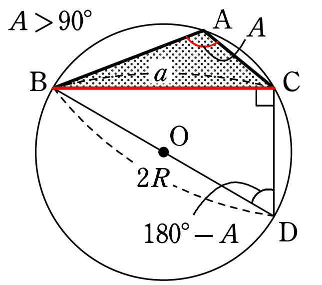
よって $a = 2R\sin\angle\mathrm{BDC}$

$= 2R\sin(180^\circ - A)$

$= 2R\sin A$

以上により，$a = 2R\sin A$ すなわち $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

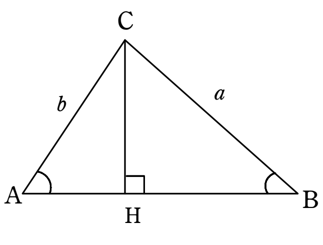
が成り立つ。



同様に，$\dfrac{b}{\sin B} = 2R$，$\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ の 2 つの等式も成り立つ。

したがって $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ 終

〜正弦定理の証明はいろいろある〜



A，B ともに鋭角のとき △ACHで $\sin A = \dfrac{\mathrm{CH}}{b}$ ∴ $\mathrm{CH} = b \cdot \sin A$

△CHBで $\sin B = \dfrac{\mathrm{CH}}{a}$ ∴ $\mathrm{CH} = a \cdot \sin B$

これより $b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$ ∴ $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

（A または B が 90° のときや A または B が鈍角のときも必要）

他にもいろいろあるので、機会があれば調べてみよう

図形と計量【正弦定理】 p.152～154

青チャートⅠ：例題 152

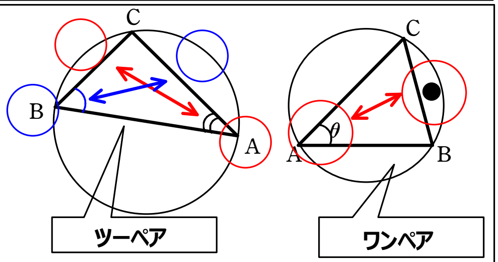
□正弦定理

$$\boxed{\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R}$$

（R は外接円の半径）

※ 計算する際は $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin\theta}$ **（ツーペア） や**

$2R=\dfrac{\bullet}{\sin\theta}$ **（ワンペア） と行った形で用いる。**



※ 必ず図をかいて考えること
（多少適当でもかかないよりは良い）

※ 円に内接する三角形の辺の長さと正弦の比の値は常に一定

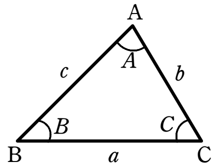
※ 上の関係式を比の形で書くと，$a:\sin A=b:\sin B=c:\sin C$ となる。

この比の関係から，$\boxed{a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C}$

$a:b:c=A:B:C$ は
一般には成り立たない

※『**外接円の半径**』と出てきたら、正弦定理（ワンペア）を解答の候補にする

注意 △ABC において頂点 A，B，Cに向かい合う辺 BC，CA，AB の長さを，それぞれ a，b，c で表す（向かい同士が対になる）。
また，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C で表す。



例題９） △ABC において，$a=6$，$A=30°$ のとき，**外接円の半径** R を求めよ。

解答 正弦定理により

ワンペア

$$2R=\frac{6}{\sin 30°}$$

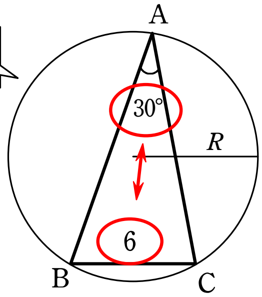
よって

$$R=\frac{6}{2\sin 30°}$$

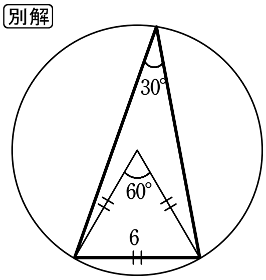
$$=\frac{6}{2\cdot\dfrac{1}{2}}$$

$$=6$$

サイン は
分母が 2 なので
先に両辺に $\dfrac{1}{2}$ を
掛ける



別解



円周角と中心角の関係より
∠BOC＝2× A ＝ 60°
よって△BOC は正三角形となり
R ＝OC＝BC＝ 6

例題） $c=10$ である △ABC において，外接円の半径が $R=10$ のとき， C を求めよ。

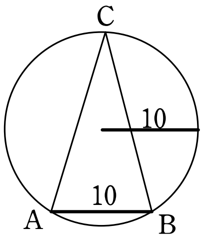
解答 正弦定理により $\dfrac{10}{\sin C}=2\cdot 10$

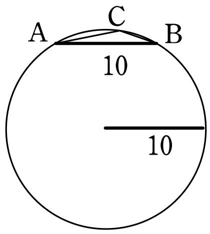
・両辺に $\dfrac{\sin C}{20}$ を掛ける

・比と見て分母分子をひっくり返して $\dfrac{\sin C}{10}=\dfrac{1}{20}$ から

よって $\sin C=\dfrac{1}{2}$

これを満たす C は $C=30°，150°$





図形と計量【正弦定理】 p.152～154

青チャートⅠ：例題 152

◎三角形の 1 辺の長さと 2 角の大きさが与えられている場合には，**正弦定理（ツーペア）**で残りの辺の長さを求めることができる。

例題８） $\triangle ABC$ において，$a=10$，$B=60^\circ$，$C=75^\circ$ のとき，b を求めよ。

解答　$A+B+C=180^\circ$ であるから

$$A=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$$

正弦定理により　$\dfrac{10}{\sin 45^\circ}=\dfrac{b}{\sin 60^\circ}$

方法①クロスに掛け算

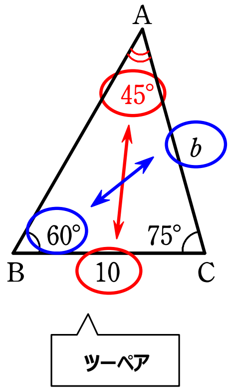
$$\sin 45^\circ\times b=10\times\sin 60^\circ$$

方法②文字の下の分母を掛け算

ゆえに　$b=\dfrac{10}{\sin 45^\circ}\cdot\sin 60^\circ$

$$=10\cdot\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{6}$$

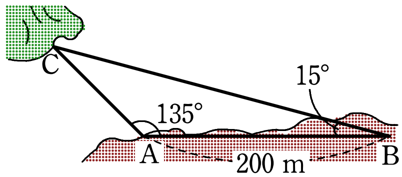
逆数



例） 右の図のように，200 m 離れた海岸の 2 地点 A，B と，島にある地点 C について

$\angle CAB=135^\circ$，$\angle CBA=15^\circ$

であった。B，C 間の距離を求めよ。



解答

三角形の内角の和は 180° であるから　AB の向かいの角度を求める

$$\angle C=180^\circ-(135^\circ+15^\circ)=30^\circ$$

正弦定理により　$\dfrac{BC}{\sin 135^\circ}=\dfrac{200}{\sin 30^\circ}$

したがって　$BC=200\times\sin 135^\circ\times\dfrac{1}{\sin 30^\circ}$

$$=200\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{1}$$

逆数

$$=200\sqrt{2}$$

答　$200\sqrt{2}$ m