

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】余弦定理を使いこなせるようになろう

○余弦定理の証明（三平方の定理を用いた証明（教科書はこちら））

【証明】 次の等式を証明しよう。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A \quad \dots\dots ①$$

[1] △ABCにおいて、A, Bがともに鋭角の場合

頂点Cから辺ABに垂線CHを下ろすと、三平方の定理により

$$BC^2 = CH^2 + BH^2 \quad \dots\dots ②$$

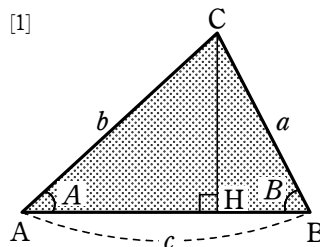
また  $BC = a$ ,  $CH = b\sin A$

$$BH = AB - AH = c - b\cos A$$

これらを②に代入して

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin A)^2 + (c - b\cos A)^2 \\ &= b^2\sin^2 A + c^2 - 2bccos A + b^2\cos^2 A \\ &= b^2(\sin^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2bccos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bccos A \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

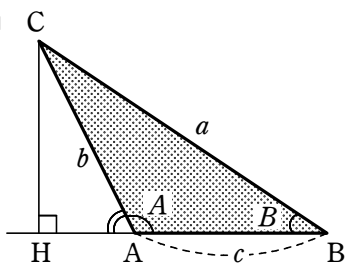
相互関係  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$



[2] AまたはBが鈍角の場合、頂点Cから辺ABの延長に垂線CH

を下ろすと、やはり  $BC^2 = CH^2 + BH^2 \quad \dots\dots ②$  が成り立つ。

Aが鈍角



$$CH = b\sin(180^\circ - A) = b\sin A$$

$$BH = AB + AH$$

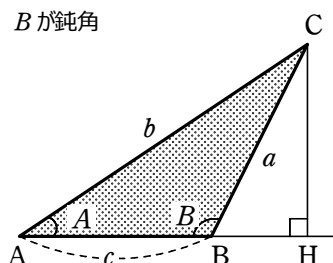
$$= c + b\cos(180^\circ - A)$$

$$= c - b\cos A$$

補角の公式

補角の公式

Bが鈍角



$$CH = b\sin A$$

$$BH = AH - AB$$

$$= b\cos A - c$$

いずれの場合も、CH, BHを②に代入すると①が得られる。

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A \quad \dots\dots ①$$

[3] AまたはBが直角のとき、 $\cos 90^\circ = 0$ であることから

$$A = 90^\circ \text{ のとき 三平方の定理により } a^2 = b^2 + c^2$$

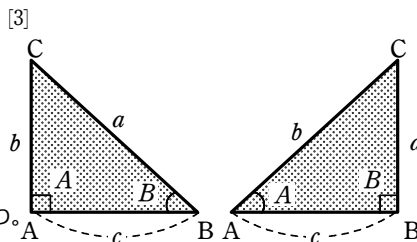
一方  $b^2 + c^2 - 2bccos A = b^2 + c^2$  であるから①は成り立つ。

$$B = 90^\circ \text{ のとき 三平方の定理により } a^2 = b^2 - c^2$$

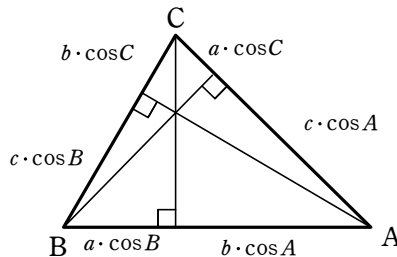
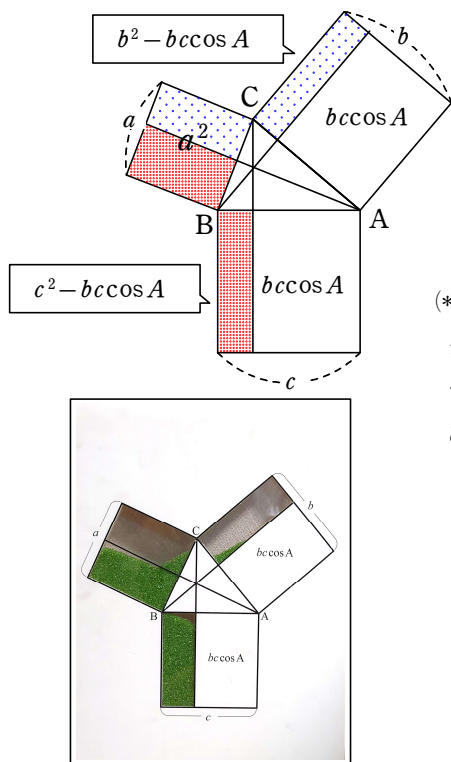
一方  $b^2 + c^2 - 2bccos A = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{c}{b} = b^2 - c^2$  であるから①は成り立つ。

同様に、余弦定理の①以外の2つの等式も成り立つ。

【終】



○余弦定理の証明（簡易版）



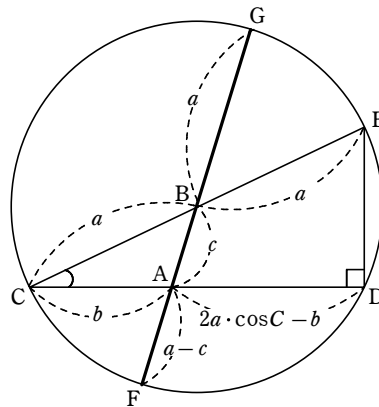
(\*) の図の辺の長さを用いることで、左図の2種類の網掛けの長方形の部分について、それぞれ面積は等しいことがわかる。そこで、1辺が  $a$  の正方形の面積は2種類の網掛けの和であるので

$$\begin{aligned} a^2 &= (b^2 - bc \cos A) + (c^2 - bc \cos A) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned}$$

※ 正確には鈍角、直角のケースにふれる必要があるが、簡易版として省略している。

○余弦定理の証明（方べきの定理から）

中心B, 半径  $a$  の円を考えると、直径の円周角は直角となるので、 $\triangle CDE$  は直角三角形となる。さらにその直角三角形を横切る形で直径を加え、各辺と頂点に名前を付ける。この際、 $\triangle CDE$  は直角三角形であるから  $CD = 2a \cdot \cos C$  であるので各辺の長さは図のようになる。



ここで方べきの定理を用いると

$$AD \cdot AC = AF \cdot AG$$

であるから

$$(2a \cdot \cos C - b) \cdot b = (a - c) \cdot (a + c)$$

$$2ab \cdot \cos C - b^2 = a^2 - c^2$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

※ 他にもあるので、機会があれば調べてみよう

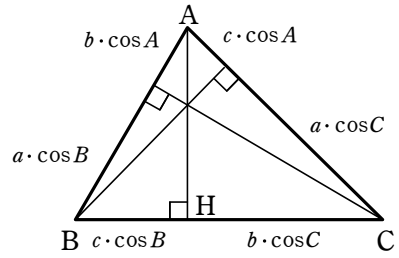
○余弦定理の証明（簡易版）から派生して…

問題7)  $\triangle ABC$ において、次の等式が成り立つ。

$$a = b \cos C + c \cos B$$

このことを次の各場合について証明せよ。

- (1)  $B, C$  がともに鋭角 (2)  $B$  が鈍角 (3)  $C$  が鈍角  
 (4)  $B$  が直角 (5)  $C$  が直角



解答  $\triangle ABC$ において、頂点  $A$  から辺  $BC$  またはその延長に垂線  $AH$  を下ろす。

(1)  $B, C$  がともに鋭角のとき

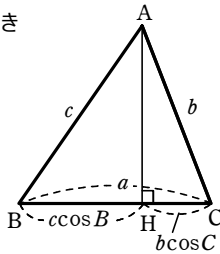
$$BH = c \cos B$$

$$HC = b \cos C$$

よって

$$a = BH + HC$$

$$= c \cos B + b \cos C$$



(2)  $B$  が鈍角のとき

$$BH = c \cos(180^\circ - B)$$

$$= -c \cos B$$

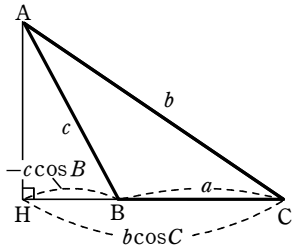
$$CH = b \cos C$$

よって

$$a = CH - BH$$

$$= b \cos C - (-c \cos B)$$

$$= b \cos C + c \cos B$$



(3)  $C$  が鈍角のとき

$$BH = c \cos B$$

$$CH = b \cos(180^\circ - C)$$

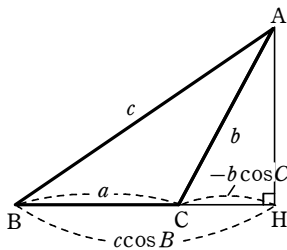
$$= -b \cos C$$

よって

$$a = BH - CH$$

$$= c \cos B - (-b \cos C)$$

$$= c \cos B + b \cos C$$

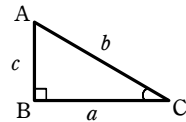


(4)  $B$  が直角のとき

$$a = b \cos C$$

また、 $\cos B = 0$  であるから

$a = b \cos C + c \cos B$  が成り立つ。

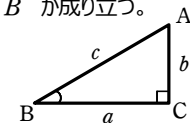


(5)  $C$  が直角のとき

$$a = c \cos B$$

また、 $\cos C = 0$  であるから

$a = b \cos C + c \cos B$  が成り立つ。



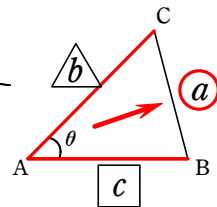
● 余弦定理（2辺と間の角から向かいの辺を求める）

$$\bullet^2 = \triangle^2 + \square^2 - 2 \cdot \triangle \cdot \square \cdot \cos \theta$$

※ 教科書のように3本も覚える必要はなし。余弦定理はことばで覚える！

「向かいの辺の2乗は、はさむ辺の2乗足す はさむ辺の2乗、

引くこと 2倍のはさむ辺 掛ける はさむ辺 掛ける 間の角のコサイン(余弦)」



※ ちなみに上の式を「第二余弦定理」ともいい、

$$a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C, \quad b = a \cdot \cos C + c \cdot \cos A, \quad c = b \cdot \cos A + a \cdot \cos B$$

(左辺以外の文字が交互になる組合せ)

を、「第一余弦定理」という。第一余弦定理のように垂線を取り分割するといった手法・着眼点は大切であるが第一余弦定理自体はあまり重要ではない。

練習21) △ABCにおいて、次のものを求めよ。

(1)  $a=3, c=2\sqrt{2}, B=45^\circ$  のとき  $b$

【解答】 余弦定理により 慣れてきたら2乗は暗算

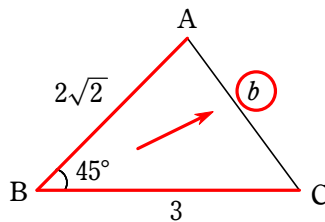
$$b^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cos 45^\circ$$

$$= 8 + 9 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

長さは  
プラス

$$= 8 + 9 - 12 = 5$$

$$b > 0 \text{ であるから } b = \sqrt{5}$$



(2)  $a=8, b=7, C=120^\circ$  のとき  $c$

【解答】 余弦定理により 慣れてきたら2乗は暗算

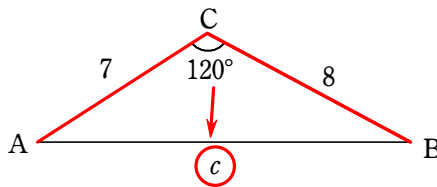
$$c^2 = 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cos 120^\circ$$

$$= 64 + 49 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

長さは  
プラス

$$= 64 + 49 + 56 = 169$$

$$c > 0 \text{ であるから } c = 13$$



例題) 右の図のように、林をはさんで2地点 A, B がある。

地点 C から A と B を見て  $\angle ACB$  を測ると  $60^\circ$  で、  
また A, C 間の距離は 50 m, B, C 間の距離は 40 m  
であった。A, B 間の距離を求めよ。

※まずは正弦定理が使えないか確認。  
ダメなら余弦定理。

【解答】 余弦定理により

$$AB^2 = 40^2 + 50^2 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 1600 + 2500 - 2 \cdot 40 \cdot 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

長さは  
プラス

$$= 1600 + 2500 - 2000 = 2100$$

$$AB > 0 \text{ であるから } AB = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21}$$

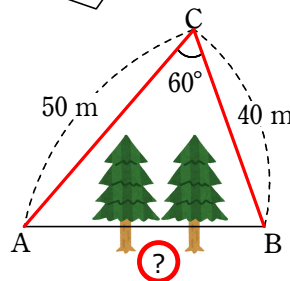


図  $10\sqrt{21}$  m

例題11) △ABCにおいて、 $b=7, c=8, B=60^\circ$  のとき、 $a$  を求めよ。

【解答】 余弦定理により

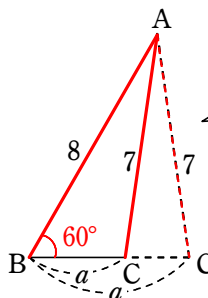
$$7^2 = 8^2 + a^2 - 2 \cdot 8 \cdot a \cos 60^\circ$$

$$49 = 64 + a^2 - 16 \cdot a \cdot \frac{1}{2}$$

ゆえに  $a^2 - 8a + 15 = 0$

$$(a-3)(a-5) = 0$$

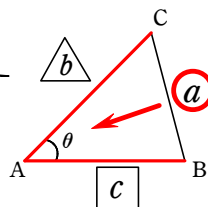
$$\therefore a = 3, 5$$



2通りの  
可能性がある

● 余弦定理（3辺から角を求める）

$$\cos \theta = \frac{\triangle^2 + \square^2 - \bullet^2}{2 \cdot \triangle \cdot \square}$$



※ 求めたい角の向かいの辺のみ引くこととなる。

※  $\bullet^2 = \triangle^2 + \square^2 - 2\triangle\square\cos\theta$  を変形することで導かれるので、

忘れたらもとの余弦定理を用いても、もちろん答えは出る。変形の仕方は知っておこう

$$\bullet^2 = \triangle^2 + \square^2 - 2\triangle\square\cos\theta$$

移項

$$2\triangle\square\cos\theta = \triangle^2 + \square^2 - \bullet^2$$

$2\triangle\square$  で両辺割る

$$\cos\theta = \frac{\triangle^2 + \square^2 - \bullet^2}{2 \cdot \triangle \cdot \square}$$

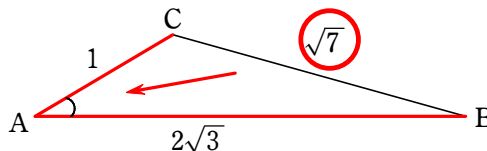
例題1  $2 + \alpha$ ) 次のような  $\triangle ABC$  において、指定されたものを求めよ。

(1)  $a = \sqrt{7}$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2\sqrt{3}$  のとき  $A$

〔解答〕 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{1^2 + (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1 + 12 - 7}{2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}} \\ &= \frac{6}{2 \cdot 1 \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

よって  $A = 30^\circ$

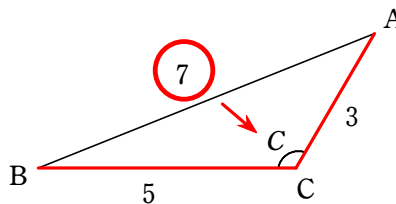


(2)  $a = 5$ ,  $b = 3$ ,  $c = 7$  のとき,  $C$

〔解答〕 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos C &= \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} \\ &= \frac{25 + 9 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 3} \\ &= \frac{-15}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって  $C = 120^\circ$



□ 三角形の角の大きさと辺の長さの関係

△ABCにおいて、三平方の定理から、次のことが成り立つ。

$$A = 90^\circ \iff a^2 = b^2 + c^2$$

分母の2・△・□は正の値なので  
符号は分子の値で決まる

また、 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  より、 $\cos A$  の符号と  $b^2 + c^2 - a^2$  の符号は一致するから、

次のことも成り立つ。

$$A < 90^\circ \iff \cos A > 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 > 0 \text{ より } a^2 < b^2 + c^2$$

$$A > 90^\circ \iff \cos A < 0 \iff b^2 + c^2 - a^2 < 0 \text{ より } a^2 > b^2 + c^2$$

まとめると  $b^2 + c^2$  と  $a^2$  の大小によって、次のことがいえる。

	$b^2 + c^2 > a^2$	$b^2 + c^2 = a^2$	$b^2 + c^2 < a^2$
$\cos A$ の符号	$\cos A > 0$	$\cos A = 0$	$\cos A < 0$
角 $A$ の種類	$A$ は鋭角	$A$ は直角	$A$ は鈍角

練習24) △ABCにおいて、 $a=3, b=5, c=6$  のとき、 $A, B, C$  は鋭角、直角、鈍角のいずれであるか。

【解答】  $a^2=9, b^2=25, c^2=36$  から  $a^2 < b^2 + c^2, b^2 < c^2 + a^2, c^2 > a^2 + b^2$

よって  $A < 90^\circ, B < 90^\circ, C > 90^\circ$

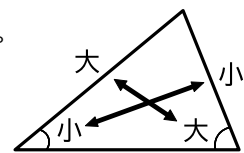
ゆえに、 $A$  は鋭角、 $B$  は鋭角、 $C$  は鈍角である。

三角形について、次のことが成り立つことが知られている。

三角形の2辺の大小関係は、その向かい合う角の大小関係と一致する。

特に、最大の辺に向かい合う角は最大の角である。

三角形において、最大の角以外の角はすべて鋭角である。



よって、三角形が鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形のいずれであるかを調べるには、最大の角が鋭角、直角、鈍角のいずれであるかを調べればよい。

例9) △ABCにおいて、 $a=4, b=5, c=6$  とする。

$6^2 < 4^2 + 5^2$  であるから  $c^2 < a^2 + b^2$  ゆえに  $C < 90^\circ$

最大の角  $C$  が鋭角であるから、△ABC は鋭角三角形である。



終