図形と計量【正弦定理と余弦定理の応用】 p.159～162

青チャートⅠ：例題154～161

【態度目標】しゃべる、質問する、説明する、動く、協力する、貢献する

【内容目標】三角形の解法をマスターしよう

□三角形の辺と角

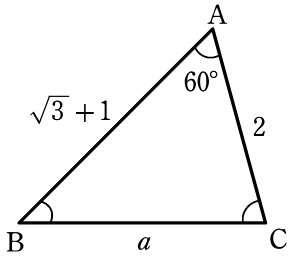
三角形の辺や角についての条件が与えられたとき，その条件を満たす三角形の形状を調べよう。

例題１３） △ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{3}+1$，$A=60^\circ$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。

解答 余弦定理により

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$=2^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\cdot 2(\sqrt{3}+1)\cos 60^\circ$$
$$=6$$

$a>0$ であるから $a=\sqrt{6}$



分かったものを書き込んでいく

どちらかを選択

正弦は計算は楽⇒角は吟味を

正弦定理により

$$\frac{2}{\sin B}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \text{ から } \frac{\sin B}{2}=\frac{\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}$$

$$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times 2=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$B=45^\circ,\ 135^\circ$

① $A=60^\circ$ より $0<B<120^\circ$	② $b<a$ より $B<A$

ゆえに $B=45^\circ$

よって $C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

答 $a=\sqrt{6}$，$B=45^\circ$，$C=75^\circ$

余弦は計算は面倒⇒角は一つ

$a>0$ であるから $a=\sqrt{6}$

余弦定理により

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{6}}$$
$$=\frac{2(3+\sqrt{3})}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$$

①約分できるように変形	②有理化
$=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$=\dfrac{\sqrt{6}(3+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{6(3-1)}$ $=\dfrac{\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

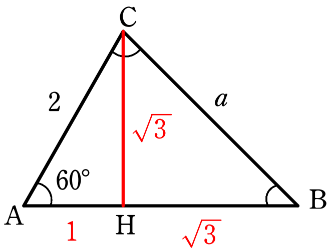
どちらかで対応しよう

ゆえに $B=45^\circ$

よって $C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

答 $a=\sqrt{6}$，$B=45^\circ$，$C=75^\circ$

別解



角度が分かるのは
特別な直角三角形であるから
補助線を加えて図形的に処理する方法

頂点C から辺AB に垂線CH を引くと

△ACH は∠A＝60°，斜辺AC＝2 の直角三角形

であるから，

$AH=1$，$CH=\sqrt{3}$，$\angle ACH=30^\circ$

また，$BH=AB-AH=\sqrt{3}$ であり

$BH=CH=\sqrt{3}$，$\angle BHC=90^\circ$

であるから△BHC は直角二等辺三角形

ゆえに $BC=\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$，$\angle BCH=45^\circ$

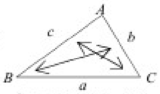
したがって $a=\sqrt{6}$，$B=45^\circ$，$C=75^\circ$

図形と計量【正弦定理と余弦定理の応用】 p.159～162

青チャートⅠ：例題154～161

まず図を書いてみよう！！

三角形の内角の和 $A+B+C=180^\circ$ や「辺の長さと角度の大小関係」にも注意！
辺の比や三平方の定理からも図形の形は決まることに注意しよう



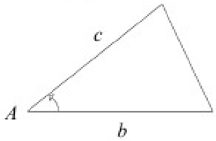
$b>c \Leftrightarrow \angle B>\angle C$

辺の長さ	角の大きさ	
3つ		余弦定理
2つ	1つ	辺を求める：余弦定理 角を求める：正弦定理
1つ	2つ	正弦定理
外接円の半径		正弦定理

2辺と１角が与えられている場合

① 2辺とその挟む角が既知 → 余弦定理 → 正弦定理 → 内角の和

例） b , c , A が既知



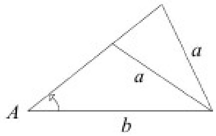
余弦定理 ［a］ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

正弦定理 ［B］ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

内角の和 ［C］ $C=180^\circ-(A+B)$

② 2辺とその対角の一つが既知 → 正弦定理 → 内角の和 → 正弦定理

例） a , b , A が既知



正弦定理 ［B］ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

内角の和 ［C］ $C=180^\circ-(A+B)$

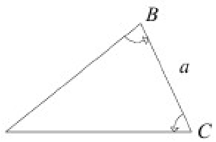
正弦定理 ［c］ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ など

※ 2辺1対角のとき、三角形は1通りに決まるとは限らない！

1辺と2角が与えられている場合

③ $A+B+C=180^\circ$ より、角がわかる → 内角の和 → 正弦定理 → 正弦定理

例） B , C , a が既知



内角の和 ［A］ $A=180^\circ-(B+C)$

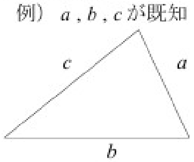
正弦定理 ［b］ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

正弦定理 ［c］ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

3辺が与えられている場合

④ 3辺が既知 → 余弦定理 → 正弦定理 → 内角の和

例） a , b , c が既知



余弦定理 ［A］ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

正弦定理 ［B］ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

内角の和 ［C］ $C=180^\circ-(A+B)$

※ 角を求めるときの注意

角を求めるときに、正弦定理でも余弦定理でも求めることができる場合がある。その際、次のような注意が必要

正弦定理 … **計算は楽だが、角度の吟味が必要**

余弦定理 … **計算は少し複雑だが、ただ1通りに決まる**

図形と計量【正弦定理と余弦定理の応用】 p.159～162

青チャートⅠ：例題154～161

応用例題１） $\triangle ABC$ において，$a=\sqrt{6}$，$b=2$，$B=45^\circ$ のとき，c，A，C を求めよ。

解答 余弦定理により，$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ であるから

$$2^2=c^2+(\sqrt{6})^2-2\cdot c\cdot\sqrt{6}\cos 45^\circ$$

ゆえに　$c^2-2\sqrt{3}c+2=0$

これを解いて　$c=\sqrt{3}\pm\sqrt{3-2}=\sqrt{3}\pm 1$

[1] $c=\sqrt{3}+1$ のとき

余弦定理により

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}+1)^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot 2(\sqrt{3}+1)}$$

$$=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}+1)}=\frac{1}{2}$$

有理化だと

$$=\frac{(2\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

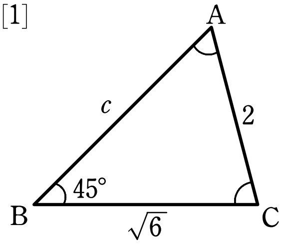
$$=\frac{6-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2}{4(3-1)}$$

$$=\frac{4}{4\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$A=60^\circ$

よって　$C=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

[1]



[2] $c=\sqrt{3}-1$ のとき

余弦定理により

$$\cos A=\frac{2^2+(\sqrt{3}-1)^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot 2(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$

有理化だと

$$=\frac{(-2\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+1)}{4(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

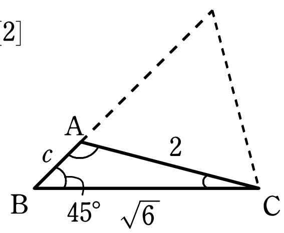
$$=\frac{-6-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2}{4(3-1)}$$

$$=\frac{-4}{4\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに　$A=120^\circ$

よって　$C=180^\circ-(120^\circ+45^\circ)=15^\circ$

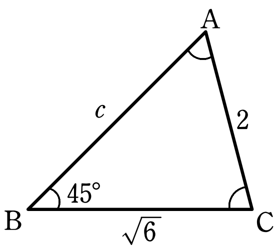
[2]



答 $c=\sqrt{3}+1$，$A=60^\circ$，$C=75^\circ$

または　$c=\sqrt{3}-1$，$A=120^\circ$，$C=15^\circ$

別解



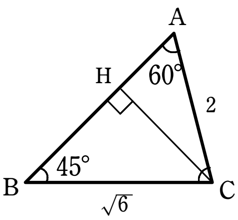
正弦定理より　$\dfrac{\sqrt{6}}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$　であるから

$$\sin A=\sqrt{6}\times\sin 45^\circ\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$B=45^\circ$ より　$0^\circ<A<135^\circ$ であるから　$A=60^\circ$，120°

[1]　$A=60^\circ$ のとき

余弦定理でもよいが
図形から解くと…



点C から AB へ垂線CH を引くと

$\triangle BCH$ は直角二等辺三角形

$\triangle ACH$ は$\angle A=60^\circ$ の

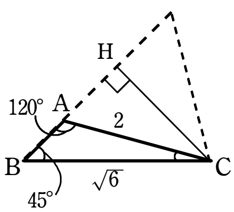
直角三角形なので

$BH=CH=\sqrt{3}$，$AH=1$

$\therefore AB=AH+BH=\sqrt{3}+1$

[1]　$A=120^\circ$ のとき

余弦定理でもよいが
図形から解くと…



点C から AB へ垂線CH を引くと

$\triangle BCH$ は直角二等辺三角形

$\triangle ACH$ は$\angle A=60^\circ$ の

直角三角形なので

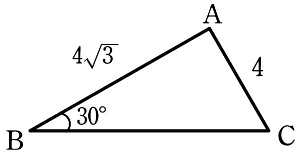
$BH=CH=\sqrt{3}$，$AH=1$

$\therefore AB=BH-AH=\sqrt{3}-1$

図形と計量【正弦定理と余弦定理の応用】 p.159～162

青チャートⅠ：例題154～161

練習） △ABC において，$b=4$，$c=4\sqrt{3}$，$B=30°$ のとき，残りの辺の長さと角の大きさを求めよ。



解答 正弦定理により $\dfrac{4}{\sin 30°}=\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin C}$ から $\dfrac{\sin C}{4\sqrt{3}}=\dfrac{\sin 30°}{4}$

よって $\sin C=\sin 30°\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 4\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot 4\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

したがって $C=60°$，$120°$

$B=30°$ から $0°<C<150°$ であるが，$C=60°$，$120°$ は $0°<C<150°$ を満たす。

[1] $C=60°$ のとき

$A=180°-(30°+60°)=90°$

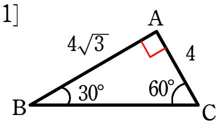
△ABC は $A=90°$ の直角三角形であるから，三平方の定理により

$a=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}$

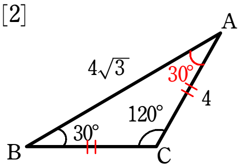
$=\sqrt{64}=8$

1：2：$\sqrt{3}$ からでも良い

[1]



[2]



[2] $C=120°$ のとき

$A=180°-(30°+120°)=30°$

$A=B$ であるから，△ABC は BC＝CA の二等辺三角形である。

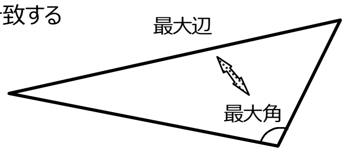
よって $a=b=4$

数学Ａ図形の性質のおさらい

三角形において，角の大小関係と対辺の大小関係は一致する

↓

特に，**最大辺の向かいが最大角！**



三角形の辺と角

すべての角が鋭角である三角形を **鋭角三角形** といい， ある角が鈍角三角形を **鈍角三角形** という

□正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ これをばらすと $\dfrac{a}{\sin A}=2R$， $\dfrac{b}{\sin B}=2R$， $\dfrac{c}{\sin C}=2R$

分母を払って $a=2R\sin A$， $b=2R\sin B$， $c=2R\sin C$

ここで $a:b:c$ に代入すると， $a:b:c=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$

$=\sin A:\sin B:\sin C$

ゆえに $\boldsymbol{a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C}$

別解 正弦定理の関係式 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ は，次のように書きかえられる。

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ より $a:b=\sin A:\sin B$，$b:c=\sin B:\sin C$

すなわち $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

練習２８）

△ABC において，次の等式が成り立つとき，この三角形の最も大きい角の大きさを求めよ。

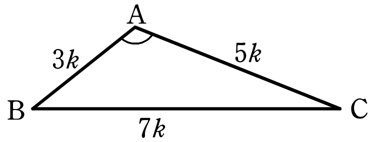
$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

方針 … 最大の辺に向かい合う角が最大の角である。与えられた等式と正弦定理から，最大の辺がわかる。

ヒント … 三角形の角の大きさは，3 辺の長さ a，b，c の比がわかれば，余弦定理から求められる。

解答　正弦定理により

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$



これと与えられた等式から

$a : b : c = 7 : 5 : 3$

よって，ある正の数 k を用いて

$a = 7k$，$b = 5k$，$c = 3k$

7 : 5 : 3 は辺の長さではないので
$7k : 5k : 3k$ として長さを変化できるようにする

と表される。

a が最大の辺であるから，A が最大の角である。

余弦定理により

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 3k} = -\frac{15k^2}{2 \cdot 5 \cdot 3k^2} = -\frac{1}{2}$$

よって，最大の角の大きさは　$A = 120°$

補足　3:5:7 や 7:8:13 は
三角比の値となるのでよく目にする。
辺の比が　8 : 7 : 13 である
△ABC では，三角形の大きさに
よらず常に最大角は 120° となる。

赤チャート数学Ⅰ　練習１００） 3 辺の長さが a，$a+2$，$a+4$ である三角形について考える。
この三角形が鈍角三角形であるとき，a のとりうる値の範囲を求めよ。

【青チャート数学Ⅰ重要例題１５９類題】

辺の長さは正

$a+4$ は最大辺

解答　$a > 0$ であり　$a < a+2 < a+4$ であるから，

三角形の成立条件は　$a + (a+2) > a+4$

三角形の成立条件は
|他の 2 辺の差| < 辺 < 他の 2 辺の和
だが，差は $(a+2) - a = 2$ から
$2 < a+4$ より $a > -2$ となり明らかである

よって　　$a > 2$　…… ①

$a > 2$ なら三角形が作られるということ

更に，鈍角三角形となるための条件は

$(a+4)^2 > a^2 + (a+2)^2$

	$b^2+c^2>a^2$	$b^2+c^2=a^2$	$b^2+c^2<a^2$
$\cos A$ の符号	$\cos A > 0$	$\cos A = 0$	$\cos A < 0$
角 A の種類	A は鋭角	A は直角	A は鈍角

ゆえに　　$a^2 - 4a - 12 < 0$

すなわち　$(a+2)(a-6) < 0$

よって　　$-2 < a < 6$　…… ②

①，② の共通範囲を求めて　$2 < a < 6$

補足　辺の大小がわかりにくい場合などは条件を満たす値を代入して目処を付けよう。

発展 三角形の形状

三角形の辺や角の間に成り立つ等式が与えられたとき，その三角形がどのような形をしているかを調べてみよう。

例１） △ABC において，$\sin A=\cos B\sin C$ が成り立つとき，この三角形はどのような形をしているか。

方針　正弦定理と余弦定理を利用して，与えられた等式から『**辺だけの関係式**』を導く。

解説　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

$2R=\frac{a}{\sin A}$ より

$\frac{\sin A}{a}=\frac{1}{2R}$

$\therefore \sin A=\frac{a}{2R}$

また，余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

これらを与えられた等式に代入すると

$$\frac{a}{2R}=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{c}{2R}$$

$a=b$ → 二等辺三角形

$a=b=c$ → 正三角形

$a^2=b^2+c^2$ → 直角三角形　　などに注目

合わせ技で直角二等辺三角形にも

両辺に $4aR$ を掛けて

$$2a^2=c^2+a^2-b^2$$

よって　　$a^2+b^2=c^2$

したがって，△ABC は $C=90°$ の直角三角形である。

どの辺とどの辺が等しいかやどのかくが直角であるかなど

どんな三角形かを丁寧に述べよう。

「辺 AB を斜辺とする直角三角形」でもよい

補足　角だけの関係式にして解く方法もあるが，三角関数の知識が必要なため

現状では変形をうまく進められないことが多い。そのため基本は辺に統一しよう。

別解　$A+B+C=180°$ より　$A=180°-(B+C)$

$$\sin A=\sin\{180°-(B+C)\}$$

$$=\sin(B+C)$$

$$=\sin B\cos C+\cos B\sin C$$

数学Ⅱの三角関数で扱う加法定理より

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

これを与式に代入すると　$\sin B\cos C+\cos B\sin C=\cos B\sin C$

すなわち　$\sin B\cos C=0$

$0<B<180°$ より　$\sin B\fallingdotseq 0$ であるから　$\cos C=0$

ゆえに　$C=90°$

したがって　$C=90°$ の直角三角形である